Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 22-7-2014
Prof. Paolo Papi

Gli esercizi vanno svolti individualmente e consegnati per posta elettronica (papi@mat.uniroma1.it) o in formato cartaceo nella mia cassetta della posta entro le 11 del 25 luglio. Per superare la prova, svolgere almeno un esercizio fornendo una soluzione dettagliata.
Tutte le algebre di Lie sono complesse e di dimensione finita.

Esercizio 1. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice e $\mathfrak{b}$ una sottoalgebra di Borel. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme degli ideali di $\mathfrak{b}$ contenuti in $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$

1. Dimostrare che se $\mathfrak{i} \in \mathcal{B}$, allora è del tipo $\mathfrak{i} = \oplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$, per qualche $\Sigma \subset \Delta^+$.
2. Determinare le condizioni su Σ per cui $\mathfrak{i} = \oplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$ appartiene a $\mathcal{B}$.
3. Sia $\mathfrak{g} = sl(n+1, \mathbb{C})$. Calcolare la cardinalità di $\mathcal{B}$ per $n = 2, 3, 4$. Facoltativo: determinare tale cardinalità nel caso generale.

Esercizio 2. Sia Δ un sistema di radici, Δ^+ un sistema positivo con corrispondente vettore di Weyl ρ. Dato un peso dominante λ, determinare gli elementi w del gruppo di Weyl di Δ per cui $w(\lambda + \rho) - \rho$ è dominante.

Esercizio 3. Sia L un'algebra di Lie (non necessariamente semisemplice) e H una sottoalgebra di Cartan. Dimostrare che H è nilpotente massimale ed esibire un controesempio per il viceversa.

Esercizio 4. Diciamo che un'algebra di Lie L è riduttiva se il suo centro coincide col radicale risolubile. Dimostrare che L è riduttiva se e solo se L è completamente riducibile come $ad(L)$-modulo.

Esercizio 5. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice e $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$. Dimostrare che il centralizzante in $\mathfrak{g}$ di $h \in \mathfrak{h}$ è una sottoalgebra riduttiva di $\mathfrak{g}$ (vedi esercizio 4 per la definizione). Dimostrare che esistono elementi $h \in \mathfrak{h}$ il cui centralizzante è $\mathfrak{h}$.