Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 13-02-2014
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.

Esercizio 1. Determinare la dimensione delle rappresentazioni fondamentali di un'algebra di Lie semplice di tipo G_2. Si ricordi che tali rappresentazioni sono quelle di peso più alto ω_i, $i = 1, 2$, ove $\frac{2(\omega_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ e α_1, α_2 sono le radici semplici.

Esercizio 2.

1. Si ricordi che un'algebra di Lie semplice di tipo F_4 ha dimensione 52. Determinare il numero di radici positive lunghe.

2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice. Siano $V(\lambda), V(\mu)$ $\mathfrak{g}$-moduli di peso più alto λ, μ rispettivamente. Dimostrare che $\lambda+\mu$ è un peso di $V(\lambda)\otimes V(\mu)$.

Esercizio 3. Determinare un'espressione ridotta per la permutazione segnata $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ pensata come elemento del gruppo di Weyl B_6, con riflessioni semplici s_i, $1 \leq s_i \leq 6$ tali che s_6 è la riflessione rispetto all'unica radice semplice corta.

Esercizio 4.

1. Definire la nozione di modulo di peso più alto di un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$.

2. Dimostrare l'esistenza di un modulo di peso più alto $\lambda, \in \mathfrak{h}^*$, ove $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$.

Esercizio 5. Dimostrare che un'algebra di Lie ammette un'unico ideale nilpotente massimale.

Esercizio 6. Dimostrare che se L è l'algebra di Lie libera su un insieme X e V è lo spazio vettoriale avente X per base, allora $U(L) \cong T(V)$.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.