Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 23-01-2014
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.

Esercizio 1. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie complessa risolubile e $\mathfrak{a}$ un ideale minimale proprio. Dimostrare che $\dim \mathfrak{a} = 1$.

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie complessa nilpotente di dimensione finita. Dimostrare che la forma di Killing è identicamente nulla.

Esercizio 3. Sia Δ un sistema di radici e W il corrispondente gruppo di Weyl. Fissato un sistema semplice Π, sia $\alpha \in \Pi$ e sia s_α la corrispondente riflessione. Detta ℓ la funzione lunghezza su W, determinare condizioni necessarie e sufficienti affinchè $\ell(s_\alpha w) = \ell(w) - 1$.

Esercizio 4.

1. Definire la nozione di algebra di Lie semisemplice.
2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice complessa di dimensione finita. Dimostrare che due qualsiasi forme bilineari simmetriche non degeneri invarianti su $\mathfrak{g}$ sono proporzionali.

Esercizio 5.

1. Descrivere i sistemi di radici di rango due.
2. Sia Δ un sistema di radici. Dimostrare che se $(\alpha, \beta) > 0$ allora $\alpha - \beta \in \Delta$ e che se $(\alpha, \beta) < 0$ allora $\alpha + \beta \in \Delta$. Vale il viceversa ?
3. Definire gli esponenti di un gruppo di Weyl e spiegare come è possibile calcolarli.

Esercizio 6. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice di tipo A_3. Si fissi una sottoalgebra di Borel e siano $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ le corrispondenti radici semplici. Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il modulo irriducibile di peso più alto $\alpha_1 + k\alpha_2 + \alpha_3$ ha dimensione finita e per ciascun valore eventualmente trovato calcolare tale dimensione.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.