**Corso di Laurea Specialistica in Matematica**

**Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 23-4-2014**

**Prof. Paolo Papi**

*Gli esercizi vanno svolti individualmente e consegnati per posta elettronica (papi@mat.uniroma1.it) o in formato cartaceo nella mia casella della posta in dipartimento entro le ore 13 del 22 marzo. Gli studenti che scelgono di consegnare gli esercizi in formato cartaceo sono pregati di mandarmi una mail in modo che io possa confermare la ricezione.*

*Per superare la prova, svolgere almeno un esercizio fornendo una soluzione dettagliata.*

**Esercizio 1.** Sia $L$ l'algebra di Lie delle matrici triangolari strettamente superiori $3 \times 3$ a coefficienti reali. Denotiamo con $\{e_{ij}\}$ le matrici elementari.

- Estendere $e_{12} \mapsto \frac{d}{dx}$, $e_{23} \mapsto$ "moltiplicazione per $x$" a una rappresentazione di $L$ sullo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$. Dimostrare che questa rappresentazione è irriducibile.
- Dimostrare che una rappresentazione irriducibile di $L$ in cui il centro agisce per uno scalare non nullo ha necessariamente dimensione infinita.

**Esercizio 2.** Sia $\Delta$ un sistema di radici e $\Pi$ un sistema semplice. Identifichiamo $\Pi$ con i vertici del diagramma di Dynkin.

- Dimostrare che se $S \subseteq \Pi$ è un sottoinsieme connesso, allora $\sum_{\alpha \in S} \alpha \in \Delta$.
- Dimostrare che, per $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \alpha - \beta \notin \Delta \cup \{0\} \implies (\alpha, \beta) = 0$.

**Esercizio 3.** Sia $n > 2$ intero. Sia $(W, S)$ il sistema di Coxeter (infinito) il cui grafo di Coxeter è un ciclo con $n$ vertici (ad esempio, se $n = 3$ un triangolo, se $n = 4$ un quadrato etc.) Definiamo

$$G = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ è biunivoca}, f(i+n) = f(i)+n, \forall\, i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{n} f(i) = \frac{n(n+1)}{2}\}.$$

Costruire un omomorfismo iniettivo $W \to G$. (In realtà i gruppi sono isomorfi, ma questo fatto è più difficile da dimostrare).

**Esercizio 4.** Sia $\Delta$ un sistema di radici e $\Pi$ un sistema semplice. Sia $P$ il reticolo dei pesi interi e $P^+$ l'insieme dei pesi interi dominanti. Sia $W$ il gruppo di Weyl di $\Delta$. Denotiamo con $\leq$ l'ordine parziale sul reticolo dei pesi definito da $\eta \leq \xi$ se $\xi - \eta$ è somma di radici positive.

Diciamo che un sottoinsieme $\Sigma$ di $P$ è *saturo* se per ogni $\lambda \in \Sigma$ e per ogni $\alpha \in \Delta$ risulta $\lambda - i\alpha \in \Sigma$ per ogni $0 < i \leq (\lambda, \alpha^\vee)$.

- Dimostrare che se $\Sigma$ è saturo allora è $W$-stabile.
- Dimostrare che se $\Sigma$ è saturo allora $\lambda \in \Sigma, \mu \in P^+, \mu < \lambda \implies \mu \in \Sigma$.