Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 13-2-2014
Prof. Paolo Papi

Gli esercizi vanno svolti individualmente e consegnati per posta elettronica (papi@mat.uniroma1.it) o in formato cartaceo nella mia casella della posta in dipartimento entro le ore 12 del 18 febbraio. Gli studenti che scelgono di consegnare gli esercizi in formato cartaceo sono pregati di mandarmi una mail in modo che io possa confermare la ricezione.

Per superare la prova, svolgere almeno un esercizio fornendo una soluzione dettagliata.
Tutte le algebre di Lie sono complesse e di dimensione finita.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie abeliana e V un modulo diagonalizzabile rispetto ad L, ovvero

$$V = \bigoplus_{\lambda \in L^*} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \{v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \ \forall\, h \in L\}.$$

Dimostrare che se U è un sottomodulo di V allora

$$U = \bigoplus_{\lambda \in L^*} (U \cap V_\lambda).$$

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche $2n \times 2n$, Calcolare la decomposizione in spazi radici rispetto alla sottoalgebra di Cartan formata dalle matrici diagonali a blocchi

$$diag(\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & h_n \\ -h_n & 0 \end{pmatrix}),$$

$h_i \in \mathbb{C}$.

Esercizio 3. Sia W un gruppo di Weyl di un sistema di radici e ℓ la funzione lunghezza (rispetto a una fissata scelta di radici positive). Dimostrare che

$$\ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2) - 2|\{\alpha \in \Delta \mid \alpha \in \Delta^+, w_1(\alpha) \in \Delta^-, w_2^{-1}(\alpha) \in \Delta^-\}|.$$

Esercizio 4. Sia W un gruppo di Weyl. Sia $w \in W$ e sia $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ un'espressione ridotta di w. Dimostrare che gli elementi $w_h = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_h}} \cdots s_{i_k}$, $1 \leq h \leq k$ sono tutti distinti (il simbolo $\widehat{s_{i_h}}$ significa che s_{i_h} è omessa).

Dimostrare inoltre che l'insieme $\{w_h \mid 1 \leq h \leq k\}$ non dipende dall'espressione ridotta scelta. (Per provare quest'ultima asserzione può essere utile ricordare il teorema di Iwahori-Matsumoto in base al quale si passa da un'espressione ridotta a un'altra usando solo relazioni di treccia.)

Esercizio 5. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ e $\{x^1, \ldots, x^n\}$ la base duale rispetto alla forma di Killing. Dimostrare che $c = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i$ è nel centro di $U(\mathfrak{g})$. Calcolare l'azione di c su un modulo irriducibile finito-dimensionale di peso più alto λ.