Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 23-1-2014

Prof. Paolo Papi

Gli esercizi vanno svolti individualmente e consegnati per posta elettronica (papi@mat.uniroma1.it) entro le ore 12 del 28 gennaio o in formato cartaceo al sottoscritto nello studio 122 dalle ore 10 alle ore 12 del 28 gennaio. Per superare la prova, svolgere almeno un esercizio fornendo una soluzione dettagliata.
Tutte le algebre di Lie sono complesse e di dimensione finita.

Esercizio 1. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice e $\mathfrak{b}$ una sottoalgebra di Borel.

1. Dimostrare che se $\mathfrak{i}$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{b}$, allora è del tipo $\mathfrak{i} = \oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha$, per qualche $\Sigma \subset \Delta^+$.
2. Determinare le condizioni su Σ per cui $\mathfrak{i} = \oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{b}$.
3. Sia $\mathfrak{g} = sl(n+1,\mathbb{C})$. Dimostrare che esistono esattamente 2^n ideali abeliani di $\mathfrak{b}$.

Esercizio 2. Dimostrare che in E_8 esistono otto radici mutuamente ortogonali. (Prendere la radice più alta θ, considerare $\theta^\perp$ e iterare). È vero che in un sistema di radici irriducibile di rango n esistono n radici mutuamente ortogonali ?

Esercizio 3. Sia W un gruppo di Weyl di tipo E_6 o D_n. Dire, motivando la risposta, se $-1 \in W$.

Esercizio 4. Sia $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\} \cup \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ un sistema di radici di tipo B_3. Dimostrare che la proiezione ortogonale di Δ sul sottospazio di $V = \sum_{i=1}^3 \mathbb{R}e_i$ ortogonale a $e_1 + e_2 + e_3$ è un sistema di radici di tipo G_2.

Esercizio 5. Diciamo che un'algebra di Lie L è riduttiva se il suo centro coincide col radicale risolubile. Dimostrare che L è riduttiva se e solo se L è completamente riducibile come $ad(L)$-modulo. È vero che ogni rappresentazione finito-dimensionale è completamente riducibile ?