Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Prova in itinere di Istituzioni di Algebra superiore del 17-1-2014
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME MATRICOLA

Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.

Esercizio 1. Sia Δ un sistema di radici, Δ^+ un sistema positivo e Π il corrispondente sistema semplice. Dimostrare che se $\beta \in \Delta^+ \setminus \Pi$, esiste $\alpha \in \Pi$ tale che $\beta - \alpha \in \Delta^+$.

Esercizio 2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa di dimensione finita, $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan, Δ il sistema di radici di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un sistema semplice.

1. Definire la matrice di Cartan di $\mathfrak{g}$.
2. Definire il diagramma di Dynkin di $\mathfrak{g}$.
3. Enunciare il teorema di classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse di dimensione finita.

Esercizio 3. Determinare la matrice di un elemento di Coxeter di un gruppo di Weyl W di tipo G_2, che agisce nella rappresentazione di riflessione su $\mathbb{R}^2$, nella base delle radici semplici. Calcolare gli esponenti di W.

Esercizio 4. Sia L l'algebra di Lie quoziente dell'algebra di Lie libera su tre generatori x, y, z modulo l'ideale generato dai bracket che coinvolgono almeno tre generatori. Determinare la dimensione di L e dimostrare che è nilpotente non abeliana. Scrivere una base di $U(L)$.

Esercizio 5. Sia Δ un sistema di radici di tipo A_4 e W il corrispondente gruppo di Weyl. Sia $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$ una base di radici semplici e C la corrispondente camera fondamentale. Determinare $W(\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4) \cap \overline{C}$.

Esercizio 6. Sia Δ un sistema di radici di tipo B_7. Sia $\{\alpha_i\}_{i=1}^7$ una base di radici semplici (con α_7 corta) e siano $\{\omega_i\}_{i=1}^7$ i corrispondenti pesi fondamentali. Si determinino generatori per lo stabilizzatore di $v_1 = \omega_3 + \omega_4$ e se ne calcoli la cardinalità.

Esercizio 1.

Se fosse $(\beta,\alpha)\leqslant 0$ $\forall\alpha\in\Pi$ $\{\beta\}\cup\Pi$ sarebbe linearmente indipendente; allora $(\beta,\alpha)>0$ e in tal caso $\beta-\alpha\in\Delta$. Poiché $\beta\notin\Pi$

se $\beta=\sum_{\gamma\in\Pi}k_\gamma\gamma$ risulta $k_\alpha\geqslant 1$ e $k_\xi\geqslant 1$

per almeno una ξ semplice diversa da α.

Pertanto $\beta-\alpha\in\Delta^+$

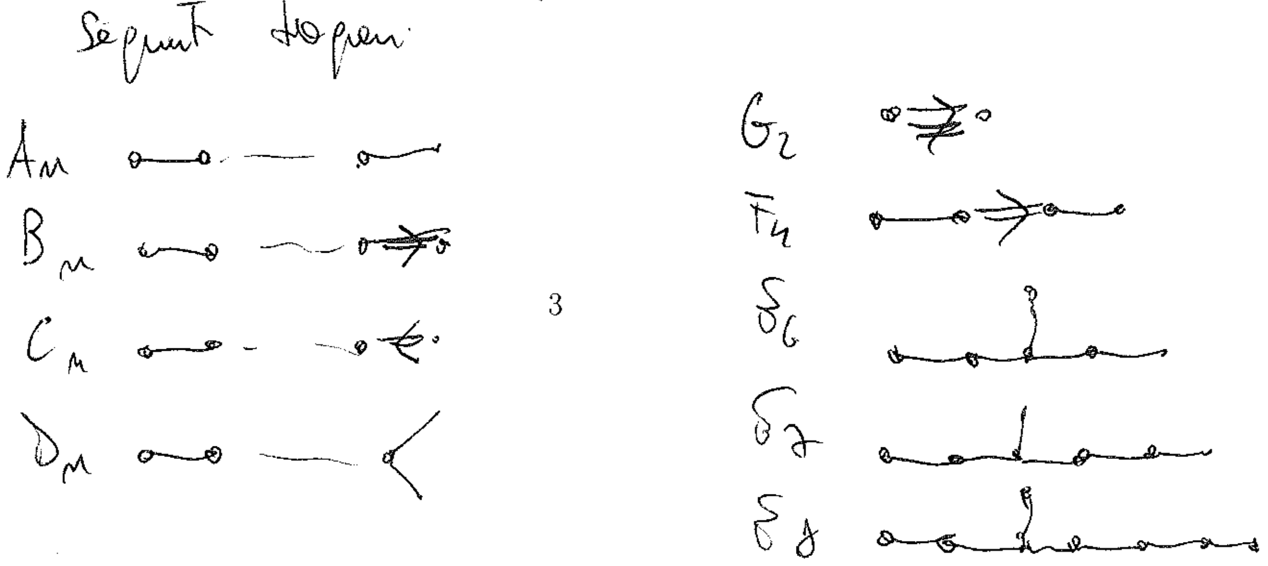
Esercizio 2.

1) Sia $(\, , \,)$ una forma bilineare simmetrica non degenere invariante su $\mathfrak{g}$. Allora la matrice di Cartan è la matrice (a_{ij}),

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

2) Il diagramma di Dynkin è un grafo con vertici $\{1, \dots, n\}$. I vertici i, j $(i \neq j)$ sono uniti da un lato se $a_{ij} \neq 0$ e tale lato ha valenza $a_{ij} a_{ji}$. Nel caso di lati di valenza maggiore di 1, si mette una freccia tra i e j che punta verso j se $|a_{ij}| > |a_{ji}|$

3) Un'algebra di Lie semisemplice è determinata a meno di isomorfismo dal suo diagramma di Dynkin, che è unione disgiunta di un numero finito dei seguenti diagrammi:



Esercizio 3.

Un elemento di Coxeter può essere $c = s_1 s_2$

Si scegliamo $\underset{\alpha_1}{\circ} \Rrightarrow \underset{\alpha_2}{\circ}$ come diagramma di Dynkin,

$$s_1 s_2 (\alpha_1) = s_1 (\alpha_1 + 3\alpha_2) = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

$$s_1 s_2 (\alpha_2) = s_1 (-\alpha_2) = -\alpha_1 - \alpha_2$$

e la matrice è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Il polinomio caratteristico è $\begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ 3 & -1-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+1)+3$

$= t^2 - t + 1$

Gli autovalori sono $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, ovvero $e^{i\frac{\pi}{3}}$ $e^{i\frac{5}{3}\pi}$

c ha ordine 6, dunque $\dfrac{2\pi m_1}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{2\pi m_2}{6} = \dfrac{5}{3}\pi$

e quindi $m_1 = 1$, $m_2 = 5$

Esercizio 4.

Una base di L è data da

$$x, \ y, \ z, \ [x,y], \ [x,z], \ [y,z]$$

quindi L ha dimensione 6 e non è abeliana perché $[x,y] \neq 0$. È invece nilpotente perché $L^3 = 0$

Dal teorema PBW una base di $U(L)$ è data da

$$x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} [x,y]^{a_4} [x,z]^{a_5} [y,z]^{a_6}$$

$a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ i = 1, \ldots, 6$

Esercizio 5.

Se $\{\varepsilon_i\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$, un elemento $x = \sum t_i \varepsilon_i$ appartiene a $\overline{C}$ se e solo se

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_4 \geq t_5$$

Infatti deve essere $(x, \alpha_i) \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, 4$ e

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$

Ora

$$x = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5$$

$$= \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5$$

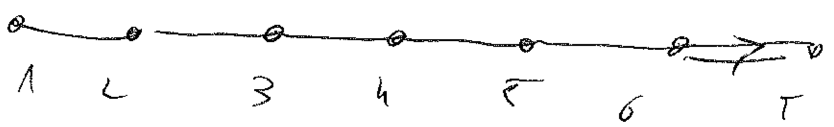
Il gruppo di Weyl è il gruppo simmetrico che agisce per permutazioni degli indici, dunque

$$Wx \cap \overline{C} = 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - 3\varepsilon_5$$

$$= 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4$$

Esercizio 6.

Perché v_1 è dominante, lo stabilizzatore è generato dalle riflessioni semplici ortogonali a v_1, che sono s_1, s_2, s_5, s_6, s_7 (il diagramma di Dynkin è



)

Chiaramente tali riflessioni generano un gruppo di tipo $A_2 \times B_3$, che ha cardinalità

$$3! \cdot (3!\, 2^3) = 288$$