Esercizio 1

Siano $e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Sia $I\neq 0$ un ideale in $sl(2,\mathbb{C})$ e sia $0\neq x=\alpha e+\beta f+\gamma h\in I$. Allora

$I\ni[e,[e,x]]=-2\beta e$; similmente $2\alpha f\in I$.

Se $\alpha=\beta=0$ allora $\gamma\neq 0$ e $h\in I$, ma allora $2e=[h,e]\in I$, $2f=[f,h]\in I$ e $I=sl(2,\mathbb{C})$.

Se invece, ad esempio, $\alpha\neq 0$, allora $f\in I$, ma in tal caso $[e,f]=h\in I$ e $\frac{1}{2}[h,e]=e\in I$, dunque $I=sl(2,\mathbb{C})$

Esercizio 2

a) Vero; se K è una sottoalgebra, $K'\subset L'$.

b) Falso; una sottoalgebra torale in L è abeliana, pertanto non semisemplice

c) Vero; sia $\pi: L\to L/I$ la proiezione canonica. Se $(L/I)^{(m)}=0$, allora $\pi(L^{(m)})=0$, ovvero $L^{(m)}\subset I$. Se ora $I^{(n)}=0$, il fatto che $(L^{(i)})^{(j)}=L^{(i+j)}$ implica che $L^{(m+n)}=0$

d) Falso; se $t(n)$ è l'algebra delle matrici triangolari superiori, $u(n)$ quella delle triangolari strettamente superiori e $d(n)$ quella delle diagonali, $t(n)/u(n)\cong d(n)$; $u(n)$, $d(n)$ sono nilpotenti ma $t(n)$ non lo è

Esercizio 3

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c' & 0 & a' \\ -c' & 0 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b'c-bc' \\ 0 & 0 & 0 & ac'-a'c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È chiaro dalla formula che $L^{(2)} = 0$ mentre $L^2 = [L,L]$, dunque L è risolubile (in particolare non è semisemplice) ma non nilpotente

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 Sia $\bar{I}$ un ideale risolubile di $L/\mathrm{Rad}\,L$. Per il teorema di corrispondenza $\bar{I} = I/\mathrm{Rad}\,L$, per qualche ideale I di L contenente $\mathrm{Rad}\,L$. Ma $\bar{I}$ è risolubile, $\mathrm{Rad}\,L$ è risolubile, quindi I è risolubile. Dunque $I \subset \mathrm{Rad}\,L$ e $\bar{I} = 0$

Esercizio 5 Nell'identificazione, $\beta(x,y) = \beta(x \otimes y)$, $\beta \in (L \otimes L)^*$

Dunque

$$\begin{aligned} l.\beta = 0 &\iff (l.\beta)(x \otimes y) = 0 \\ &\iff -\beta(l.x \otimes y) - \beta(x \otimes l.y) = 0 \\ &\iff -\beta([l,x] \otimes y) - \beta(x \otimes [l,y]) = 0 \\ &\iff \beta([x,l] \otimes y) - \beta(x \otimes [l,y]) = 0 \end{aligned}$$

ovvero, in termini di forme bilineari

$$\beta([x,e],y) = \beta(x,[e,y])$$

cioè β è invariante

<u>Esercizio 6</u> Supponiamo che e^{tD} sia un gruppo di automorfismi di A.
Allora

$$e^{tD}(ab) = e^{tD}(a)\, e^{tD}(b)$$

Sviluppando al primo ordine

$$ab + tD(ab) + o(t) = (a + tD(a) + o(t))(b + tD(b) + o(t))$$

e uguagliando i coefficienti di t otteniamo che D è una derivazione.

Viceversa, se D è una derivazione, ricordiamo che

$$D^k(ab) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} D^h(a)\, D^{k-h}(b)$$

Dunque

$$e^{tD}(ab) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k(ab)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{(k-h)!\, h!} D^h(a)\, D^{k-h}(b)$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h D^h(a)}{h!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k(b)}{k!} = e^{tD}(a)\, e^{tD}(b)$$