Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova in itinere di Istituzioni di Algebra superiore del 15-11-2013
Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Il tempo a disposizione è di due ore. Non si possono usare testi o appunti. L denota un'algebra di Lie complessa di dimensione finita.

Esercizio 1. Dimostrare che $sl(2,\mathbb{C})$ è semplice.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni fornire una dimostrazione o un controesempio

a. Una sottoalgebra di un'algebra di Lie nilpotente è nilpotente.

b. Una sottoalgebra di un'algebra di Lie semisemplice è semisemplice.

c. Se I è un ideale risolubile di L e L/I è risolubile allora L è risolubile.

d. Se I è un ideale nilpotente di L e L/I è nilpotente allora L è nilpotente.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale M delle matrici reali

$$\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che M è una sottoalgebra di Lie di $gl(4,\mathbb{R})$, specificando se è nilpotente, risolubile, semisemplice.

Esercizio 4. Dimostrare che $L/Rad(L)$ è semisemplice.

Esercizio 5. Facciamo agire L tramite ad su $(L\otimes L)^*$. Si identifichi $(L\otimes L)^*$ con lo spazio delle forme bilineari su L. Dimostrare che una forma β è associativa se e solo se $L.\beta = 0$.

Esercizio 6. Sia A un'algebra (che supponiamo di dimensione finita su $\mathbb{R}$), $D : A \to A$ un operatore lineare. Dimostrare che e^{tD} è un gruppo di automorfismi di A se e solo se D è una derivazione.