Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Esercitazione di Istituzioni di Algebra superiore
Prof. Paolo Papi

L denota un'algebra di Lie complessa di dimensione finita.

Esercizio 1. Dimostrare che il bracket è un'operazione associativa se e solo se $[L, L] \subseteq Z(L)$ ($Z(L)$ è il centro di L).

Se $[L, L] \subseteq Z(L)$ ogni membro nell'uguaglianza $[[x, y], z] = [x, [y, z]]$ è zero. Viceversa se il bracket è associativo, usando l'identità di Jacobi si ha

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [x, [y, z]]$$

da cui $[x, [y, z]] = 0 \, \forall \, x, y, z \in L$, ovvero$[L, L] \subseteq Z(L)$.
Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni fornire una dimostrazione o un controesempio

a. $\exp : gl(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ è suriettiva.

b. $\exp : gl(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ è suriettiva.

Sia A reale. Poichè $\det(e^A) = e^{tr(A)} > 0$, nessuna matrice a determinante non positivo può essere l'esponenziale di una matrice reale. Per il caso complesso, Sia $A = A_s A_u$ la decomposizione di Jordan moltiplicativa di A; allora $A_u = I + N$, con N nilpotente, e $A_s = P^{-1} diag\{a_1, \dots, a_n\} P$. Poichè gli a_i sono non nulli, possiamo scegliere logaritmi complessi b_i, $e^{b_i} = a_i$. Allora se $C = P^{-1} diag\{b_1, \dots, b_n\} P$ si ha $e^C = A$. Se N è nilpotente di classe n, poniamo $D = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$. Risulta $e^N = A_u$. Se ora poniamo $B = C + D$, C, D commutano e dunque $e^B = e^{C+D} = e^C e^D = A_s A_u = A$.

Esercizio 3. Dimostrare che se L è semisemplice, allora $L = [L, L]$.

Sia $L = \oplus_{i=1}^k L_i$ la decomposizione in ideali semplici. Allora $[L, L] = \oplus_{i=1}^k [L, L_i]$. Essendo L_i semplice, in particolare non abeliana, $[L, L_i] = L_i$ e $L = [L, L]$.

Esercizio 4. Definire l'elemento di Casimir c_V di una rappresentazione fedele V di un'algebra di Lie semisemplice L. Dimostrare che c_V non dipende della coppia di basi duali usate per definirlo.

Se $\{x_i\}, \{y_i\}$ sono basi duali rispetto alla forma traccia non degenere associata a V, l'elemento di Casimir c_V è l'operatore $c_V(v) = \sum_{i=1}^n x_i . y_i . v$.

Siano $\{x'_i\}, \{y'_i\}$ un'altra coppia di basi duali. Allora $x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$, $y'_i = \sum_j b_{ij}y_j$ e

$$\delta_{ij} = \sum_{t,k} a_{i,k}b_{j,t}(x_k, y_t) = \sum_{t,k} a_{i,k}b_{j,t}\delta_{kt} = \sum_t a_{i,t}b_{j,t},$$

quindi se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, risulta $AB^t = I$, e dunque $BA^t = I$. Deduciamo

$$\sum_i x'_i.y'_i.v = \sum_{i,l,t} a_{il}b_{it}x_l.y_t.v = \sum_l x_l.y_l.v.$$

Esercizio 5. Dimostrare che $\mathbb{R}^3_\wedge$ (l'algebra di Lie $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale) non è isomorfa a $sl(2, \mathbb{R})$.

Se le due algebre fossero isomorfe, le rappresentazioni aggiunte sarebbero equivalenti. Ma $ad(\mathbb{R}^3_\wedge)$ consiste di matrici antisimmetriche, dunque non diagonalizzabili su $\mathbb{R}$, mentre $ad(h)$ è semisemplice.

Esercizio 6. Sia V_d lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi omogenei di grado d nelle variabili X, Y. Dimostrare che

$$e \mapsto X\frac{\partial}{\partial Y}, \quad f \mapsto Y\frac{\partial}{\partial X}, \quad h \mapsto X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$$

definisce una rappresentazione $sl(2, \mathbb{C}) \to gl(V_d)$.

Verifichiamo la relazione corrispondente a $[e, f] = h$. Poniamo $E = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$.

$$\begin{aligned}[X\frac{\partial}{\partial Y}, Y\frac{\partial}{\partial X}] &= X\frac{\partial}{\partial Y}(Y\frac{\partial}{\partial X}) - Y\frac{\partial}{\partial X}(X\frac{\partial}{\partial Y}) \\ &= X\frac{\partial}{\partial X} + XY\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial X} - XY\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y} - Y\frac{\partial}{\partial Y} = E\end{aligned}$$

Analogamente, per la relazione corrispondente a $[h, e] = 2e$, si ha

$$\begin{aligned}[E, X\frac{\partial}{\partial Y}] = X\frac{\partial}{\partial Y} &+ X^2\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y} - XY\frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\ &- X^2\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y} + X\frac{\partial}{\partial Y} + XY\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = 2X\frac{\partial}{\partial Y}\end{aligned}$$

L'ultima relazione si verifica similmente.