Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Prova di esame del 24 febbraio 2014

Si ricorda che, dato un operatore lineare $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ densamente definito nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, si dice **spettro di T** l'insieme $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ dove

$$\rho(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists (T - z1)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Si ricorda inoltre che $\sigma_{\rm pp}(T)$ indica l'insieme degli autovalori di T, ossia

$$\sigma_{\rm pp}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \psi \in \mathcal{D}(T),\, \psi \neq 0 \,:\, T\psi = \lambda\psi \}.$$

Esercizio 1. (Spettro di Hamiltoniane quantistiche) Tenendo presenti le definizioni precedenti:

(i) dimostrare che $\sigma_{\rm pp}(T) \subset \sigma(T)$ per ogni operatore T;

(ii) calcolare lo spettro dell'operatore $H_0 = -\Delta$ definito sul dominio $\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$;

(iii) dimostrare che $\sigma_{\rm pp}(H_0) = \varnothing$;

(iv) calcolare lo spettro dell'operatore $T_L = -\Delta$ definito sul dominio $H^2(\mathbb{T}^1_L)$ in $L^2(\mathbb{T}^1_L)$, dove $\mathbb{T}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$; osservare che $\sigma(T_L) = \sigma_{\rm pp}(T_L)$;

(v) calcolare lo spettro dell'operatore $H_{\rm osc} = \hbar\omega(D^2 + X^2)$, definito sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$; osservare che $\sigma(H_{\rm osc}) = \sigma_{\rm pp}(H_{\rm osc})$.

Esercizio 2. (Facoltativo) Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
Esibire un operatore lineare T, densamente definito in $\mathcal{H}$, tale che $\sigma_{\rm pp}(T) \neq \varnothing$ e $\sigma(T) \setminus \sigma_{\rm pp}(T) \neq \varnothing$. [E' richiesta una traccia della dimostrazione che tali insiemi sono non vuoti].