Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Esercizi sulla trasformata di Fourier // Novembre 2013

Gli **Esercizi** proposti sono risolubili utilizzando esclusivamente la teoria svolta durante le lezioni del corso. I **Problemi** possono invece richiedere più tempo, qualche astuzia e la consultazione di materiale bibliografico.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $f \in \mathcal{H}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Diciamo che la successione f_n converge fortemente a f se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Diciamo che la successione f_n converge debolmente a f se per ogni $h \in \mathcal{H}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \langle h, f_n - f\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

In $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ studiare la convergenza debole e forte delle seguenti successioni:

(i) $f_n(x) = g(x)\cos(nx)$ per fissata $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $f_n(x) = g(x-n)$ per fissata $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione

$$(-\Delta + \lambda)\, u = f$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ per ogni assegnato dato $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Verificare che per tali valori di λ la soluzione u dipende con continuità da f (nella topologia L^2). Ripetere l'esercizio in $d = 1$. Il risultato dipende dalla dimensione?

Problema 1. Studiare l'antitrasformata di Fourier della funzione $\kappa \mapsto \frac{\sin\lambda|\kappa|}{|\kappa|}$ per $\kappa \in \widehat{\mathbb{R}}^3$, utilizzando la nozione di trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate. Dedurne la forma esplicita della soluzione dell'equazione delle onde in dimensione $d = 3$.

Riferimento: può essere utile consultare [*R. S. Strichartz*, *A guide to distribution theory and Fourier transform*, World Scientific, 2003] oppure uno dei classici testi di L. Schwartz sulla trasformata di Fourier.