Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Esercizi sulla serie di Fourier // Novembre 2013

Gli **Esercizi** proposti sono risolubili utilizzando esclusivamente la teoria svolta durante le lezioni del corso. I **Problemi** possono invece richiedere più tempo, qualche astuzia e la consultazione di materiale bibliografico.

1 Serie di Fourier uni-dimensionale

Esercizio 1. In $[0, L] \subset \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & x \in [0,L],\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L] \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

con $u_0 \in L^2([0,L])$ e le seguenti condizioni al bordo:

(i) periodicità: $u(t,0) = u(t,L)$

(ii) Dirichelet: $u(t,0) = 0 = u(t,L)$

(iii) Neumann: $(\partial_x u)(t,0) = 0 = (\partial_x u)(t,L)$.

In ognuno dei tre casi, si studi l'esistenza e il valore del limite puntuale $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$. Si studi l'esistenza dello stesso limite nella topologia della convergenza uniforme.

Si interpreti dal punto di vista fisico il diverso comportamento asintotico delle soluzioni, al variare delle condizioni al bordo.

Esercizio 2. Si fissi $T > 0$. Sia u soluzione del problema ai valori **finali**:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & t \in [0,T), \quad x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L), & t \in [0,T] \\ u(T,x) = g(x), & \text{dato finale} \end{cases}$$

per $g \in C(\mathbb{T}^1_L)$ assegnata, dove $\mathbb{T}^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.

(i) Si determini, utilizzando ad esempio lo sviluppo in serie di Fourier, una condizione su g sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{T}^1_L)$ per $t \in [0,T]$.

(ii) Si mostri che la soluzione non dipende con continuità dal dato g, nè rispetto alla topologia della convergenza uniforme in $[0, L]$, nè rispetto alla topologia di $L^2(\mathbb{T}^1_L)$. $\diamondsuit$

Esercizio 3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger libera su $\mathbb{T}^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} i\,\partial_t u(t,x) = -\partial_x^2 u(t,x), & x \in [0,L],\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) \end{cases}$$

con $u_0 \in H^2(\mathbb{T}^1_L)$. Si dimostri che esiste $T \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t+T) = u(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Avrei ottenuto lo stesso risultato se avessi imposto condizioni al bordo di Dirichelet o di Neumann?

Esercizio 4. In $[0, L] \subset \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = f(x), & x \in [0,L],\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) \end{cases}$$

per $u_0 \in L^2([0,L])$ ed una assegnata funzione $f \in C([0,L])$ (detta *forzante*). Si determini $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$. Si interpreti il risultato, giustificando dal punto di vista fisico l'esistenza di due comportamenti qualitativamente diversi.

2 Serie di Fourier multidimensionale

Esercizio 5. [Energia per l'equazione delle onde bidimensionale] In $\Omega := \mathbb{T}^2_L$ si consideri l'equazione delle onde

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi(t,x) - \Delta\phi(t,x) = 0, & x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R} \\ \phi(0,x) = \phi_0(x), & x \in \Omega \\ \phi(0,x) = \nu_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

per $\phi_0 \in C^m(\Omega), \nu_0 \in C^k(\Omega)$. Determinare preliminarmente m, k tali che la soluzione (classica) esista per ogni $t \in \mathbb{R}$. Calcolare, in funzione dei coefficienti di Fourier dei dati,

$$\mathcal{E}[\phi(t), \dot{\phi}(t)] = \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t \phi(t,x))^2 + c^2 |\nabla_x \phi(t,x)|^2 dx.$$

Esercizio 6. [Equazione del calore sul quadrato] In $\Omega = [0, L] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \sum_{1\le j\le 2} \partial^2_{x_j} u(t,x) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in C(\Omega) \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

con $u_0 \in C(\Omega)$ e le seguenti condizioni al bordo:

(i) Dirichelet: $u(t,x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$,

(ii) condizioni miste:

$$(\partial_x u)(t,0,y) = 0 = (\partial_x u)(t,L,y) \qquad \forall y \in [0,L], \tag{1}$$

$$u(t,x,y+L) = u(t,x,y) \qquad \forall x,y \in [0,L]. \tag{2}$$

In ognuno dei due casi, si studi l'esistenza e il valore del limite $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$. Si studi l'esistenza dello stesso limite nella topologia della convergenza uniforme.

Esercizio 7. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con la regione $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \subset \mathbb{R}^2$. Il sistema è preparato in uno stato descritto da $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ e la dinamica del sistema è descritta da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t \psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x \psi(t,x), & x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases}$$

(i) Si ponga $L_1 = L_2 = L$. Mostrare che la dinamica è periodica e determinarne il periodo.

(ii) Sia ora $L_1 \neq L_2$ e sia ψ_0 tale che una misura dell'energia della particella fornisce *certamente* un valore minore di $E_0 \in \mathbb{R}$. Discutere la periodicità della dinamica in funzione del parametro adimensionato $\ell = L_2/L_1$ (Suggerimento: può convenire iniziare studiando il caso in cui $\ell \in \mathbb{N}$ e poi $\ell \in \mathbb{Q}$).

3 Alcuni temi d'esame

I primi punti di ogni tema d'esame possono essere svolti utilizzando esclusivamente la teoria della serie di Fourier multidimensionale. Per i punti successivi è invece necessario attendere le lezioni sull'interpretazione probabilistica della Meccanica Quantistica (fine Novembre).

Esercizio 8. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con la regione $Q = [0, \ell] \times [0, 2\ell] \subset \mathbb{R}^2$ per $\ell > 0$. Assumendo che il confinamento sia perfetto, lo stato del sistema è descritto da un raggio in $L^2(Q)$ e la dinamica del sistema è governata da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,x), & x \in Q,\, t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial Q \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases}$$

1. Per un generico stato iniziale $\psi_0 \in L^2(Q)$ si scriva lo stato al tempo $t \in \mathbb{R}$, esplicitandolo rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Si calcoli, in funzione dei coefficienti di Fourier, la probabilità che una misura dell'energia del sistema al tempo $t \in \mathbb{R}$ fornisca un valore $E < \frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{\ell^2} =: \frac{5}{2}E_*$.

Sia ora

$$\psi_0(x,y) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ell^{-1}\sin(\pi\ell^{-1}x)\sin(\pi\ell^{-1}y) + \sqrt{\frac{1}{2}}\ell^{-1}\sin(\pi\ell^{-1}x)\sin(\pi\ell^{-1}\frac{3}{2}y).$$

3. Si calcoli *numericamente* la probabilità che una misura dell'energia del sistema al tempo $t = 7$ fornisca un valore $E < \frac{5}{2}E_*$.

4. Si calcoli il valore atteso per una misura dell'energia al tempo $t = 7$.

Esercizio 9. Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie di un cilindro di raggio $R > 0$ e lunghezza $L > 0$. Identificando la regione con l'insieme

$$Q_{L,R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi R \le x \le \pi R, -L/2 \le y \le L/2\right\}$$

la dinamica del sistema è governata dall'equazione

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x,y) \in Q_{L,R},\, t \in \mathbb{R} \\ \psi(t, x+2\pi R, y) = \psi(t,x,y) & \forall (x,y), t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x,-L/2) = 0 = \psi(t,x,L/2) & \forall x \in (-\pi R, \pi R), t \in \mathbb{R} \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Per ψ_0 appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(Q_{L,R})$, si scriva la soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (3), esplicitandola rispetto ad un

opportuno sistema ortonormale completo.

2. Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (3) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(Q_{L,R})$.

3. Determinare se esistono *stati stazionari*, ossia se esiste $\psi_0 \in L^2(Q_{L,R})$ tale che $\psi(t) = \psi_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nei punti successivi si assuma $R = L$ e si ponga $E_* = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$.

4. Il sistema è preparato in uno stato in cui una misura dell'energia fornisce con certezza o il valore $(1+\pi^2)E_*$ oppure il valore $9(1+\pi^2)E_*$; il primo valore appare con frequenza (probabilità) doppia del secondo. Determinare un vettore $\psi_* \in L^2(Q_{L,R})$ compatibile con la procedura di preparazione descritta.
4b. Facoltativo: spiegare perché il vettore ψ_* non è completamente determinato dalla procedura descritta. Esibire la famiglia di tutti i vettori in $L^2(Q_{L,R})$ compatibili con tale procedura.

5. Si assuma $\psi_0 = \psi_*$. Determinare se la dinamica è periodica e, in caso affermativo, calcolarne il periodo.

6. Per lo stato ψ_* determinato al punto 4, si calcoli la probabilità che una misura della posizione fornisca un risultato nel semicilindro superiore, ossia si calcoli

$$\mathbb{P}rob\{X \in \Omega | \psi_*\} \qquad \text{con } \Omega = \{(x,y) \in Q_{L,R} : 0 \leq y \leq L/2\}\,.$$