SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esistenza globale e fenomeni di esplosione per problemi parabolici semilineari

Candidato
Valeria Marino
Matricola 1199481

Relatore
Prof.ssa Filomena Pacella

Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo
Anno Accademico 2011-2012

Indice

Introduzione

Nella tesi ci occupiamo di problemi parabolici semilineari. Problemi di questo tipo compaiono in numerose applicazioni quali modelli matematici che descrivono processi e fenomeni in vari campi di ricerca talvolta molto distanti fra loro. Ad esempio nell'ambito della meccanica, della biofisica, della biologia, della genetica o anche per descrivere fenomeni legati alla dinamica delle popolazioni.

La più celebre equazione parabolica è, senza dubbio, l'equazione del calore, introdotta da Fourier in *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Nel corso del XIX secolo per risolvere equazioni di questo tipo, o per risolvere equazioni a derivate parziali in generale, erano utilizzati metodi euristici, come la separazione delle variabili. Tuttavia, risultati di convergenza e giustificazioni rigorose sulla sommabilità delle serie utilizzate si sarebbero avuti solo più tardi.

Verso gli inizi del '900, quando da poco erano stati formulati i 23 Problemi di Hilbert (1900), l'ucraino S.N. Bernstein, per primo, ottenne risultati di esistenza per equazioni ellittiche del secondo ordine nel piano, attraverso *stime a priori* delle potenziali soluzioni e delle loro derivate. Tali risultati di esistenza, tuttavia, presupponevano condizioni di unicità per la soluzione del problema linearizzato restringendo notevolmente la classe di problemi che potevano essere studiati utilizzando tale metodo, che rappresentò comunque un'importante svolta, aprendo una nuova strada, nello studio delle equazioni a derivate parziali. Trent'anni più tardi J. Leray e J.P. Schauder, nel loro famoso articolo *Topologie et équations fonctionnelles* pubblicato nel 1934 sugli Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, ottennero risultati di esistenza per equazioni del secondo ordine quasilineari nel piano, sfruttando unicamente stime a priori e metodi topologici, senza utilizzare condizioni di unicità. Il loro metodo si basa sull'estensione della teoria legata al grado di Brouwer ad una classe più ampia di operatori e sull'utilizzo di alcune stime a priori.

Fino agli anni '20 lo studio delle equazioni a derivate parziali si limitava alla ricerca di soluzioni classiche. Solo più tardi furono introdotti i concetti di *soluzione generalizzata* e di *soluzione debole*. Nel caso di problemi lineari, in particolare per equazioni ellittiche e paraboliche, si vide la possibilità di mostrare che soluzioni deboli, o generalizzate, risultavano essere soluzioni classiche. Il primo esempio esplicito è dato dal Lemma di Weyl, dimostrato nel 1940, relativo all'equazione di Laplace studiata attraverso soluzioni generalizzate (*The method of orthogonal projection in potential theory* pubblicato sul Duke Mathematical Journal).

Nel 1948 E. Hille e K. Yosida ottennero, indipendentemente, un importante risultato noto come Teorema di Hille-Yosida. Il teorema riguarda il seguente problema di evoluzione

$$\begin{cases} u_t(t) = Au(t) & t \in [0, \infty), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

e mette in evidenza la corrispondenza fra la soluzione di (1) ed una famiglia di semigruppi continui. Nel 1962 G. Minty avviò lo studio degli operatori massimali monotoni su spazi di Hilbert. Una generalizzazione della teoria di Hille-Yosida su spazi di Hilbert è stata sviluppata da diversi autori, fra cui F. Browder, T. Kato, Y. Komura, M. Crandall, A. Pazy e H. Brezis. Il principale risultato consiste nell'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra operatori massimali monotoni e semigruppi continui di contrazioni ad un parametro.

Già nella prima metà del XX secolo ci si interrogava sulla possibilità che si verificasse esplosione in tempo finito delle soluzioni di certi problemi di evoluzione, ad esempio J. Leray nel 1933 affrontò la questione relativamente all'equazione di Navier-Stokes nello spazio.

Lo studio delle equazioni paraboliche semilineari si sviluppò nella seconda metà del 1900. Citiamo, ad esempio, i risultati di Fujita del 1966 in cui già era affrontato il problema del *blow-up* (*On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, Journal of the Faculty of Science, The University of Tokyo, Section IA, Vol.13). Tuttavia, solo fra gli anni '80 e '90 ci si è iniziati ad interessare in maniera più sistematica dell'esistenza globale e dell'esplosione in tempo finito delle soluzioni per problemi parabolici semilineari[(1)].

Data la vastità dell'argomento, nella tesi ci siamo concentrati, in particolare, sullo studio di problemi parabolici semilineari in cui il termine non lineare è del tipo $f(u) = |u|^{p-1}u$, con $p > 1$, vale a dire:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

Molti dei risultati descritti sono validi anche per problemi più generali.

Supporremo nella maggior parte dei casi $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$.

Dopo aver affrontato la *buona positura* del problema ci siamo concentrati su alcuni risultati legati al fenomeno del *blow-up* e all'*esistenza globale* di soluzioni. La letteratura sull'argomento è piuttosto ampia, per questo motivo abbiamo operato una selezione fra i principali risultati. Per motivi di leggibilità le dimostrazioni di alcuni di essi sono state omesse, per tali dimostrazioni si rimanda alle referenze che di volta in volta abbiamo specificato.

Presentiamo il modo in cui sono organizzati i contenuti che seguiranno.

Il Capitolo 1 è dedicato allo studio del problema stazionario. Abbiamo inserito in questa parte una sezione, la prima, in cui introduciamo il concetto di differenziabilità in spazi di Banach, forniamo le definizioni fondamentali ed alcuni noti risultati. Presentiamo, inoltre, il concetto di varietà hilbertiana e

[(1)] Per una trattazione più dettagliata dello sviluppo storico dello studio delle equazioni a derivate parziali si veda *Partial Differential Equations in the 20th Century* di H. Brezis e F. Browder, Advances in Mathematics, Vol.135, pag.76-144, (1998).

riportiamo alcuni importanti teoremi quali il Teorema della funzione implicita ed il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Questa prima parte ed i teoremi in essa riportati sono funzionali allo studio del problema ellittico di cui ci occupiamo più nello specifico nella seconda sezione del capitolo. La Sezione 1.2 è, infatti, dedicata allo studio del seguente problema:

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Poniamo in evidenza la presenza di un esponente critico: $p_S = \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $p_S = \infty$ se $N = 2$. Al di sotto di tale valore proviamo l'esistenza di una soluzione positiva per il problema attraverso la minimizzazione di un opportuno funzionale su una certa varietà e, attraverso alcuni teoremi di regolarità, dimostriamo che la funzione trovata in questo modo è una soluzione classica. Per p critico e sopracritico mostriamo, sotto opportune ipotesi per il dominio, la non esistenza di soluzioni sia non negative che di segno variabile.

Nel secondo capitolo iniziamo a trattare problemi parabolici. Nella Sezione 2.1 presentiamo alcune definizioni di soluzione: classica, *mild* e debole. Anche se la nostra ricerca si limiterà a quella di soluzioni classiche, le altre definizioni sono date non solo per completezza, ma anche perché utilizzate nel corso di alcune dimostrazioni. I risultati fondamentali della Sezione 2.2 sono due teoremi. In essi si studia l'esistenza o meno di soluzioni per il problema (2) supponendo il dato iniziale $u_0 \in L^q(\Omega)$, con $q \geq 1$. Tale problema è legato ad un'altra definizione di esponente critico, $q_c = \frac{N(p-1)}{2}$. Nel primo teorema dimostriamo che se $u_0 \in L^q(\Omega)$ per q critico e sopracritico il problema (2) ammette una unica soluzione classica, mentre nel secondo teorema dimostriamo che per q sottocritico, considerando dati iniziali non negativi, il problema (2) non è ben posto.

Il Capitolo 3 è dedicato al fenomeno dell'esplosione di soluzioni in tempo finito. Nella prima sezione presentiamo il concetto di tempo di esistenza massimale e di soluzione massimale. Mettiamo, inoltre, in evidenza, nel caso in cui $u_0 \in L^q(\Omega)$ con $q > q_c$, l'importanza di avere delle stime uniformi nel tempo per la norma della soluzione: ciò infatti assicura che essa sia definita globalmente. Nella seconda sezione presentiamo una serie di teoremi che descrivono condizioni sufficienti affinché si verifichi *blow-up* in tempo finito. Questa volta studiamo il problema (2) in $L^\infty(\Omega)$, in cui sappiamo che esso è ben posto, e, nella maggior parte dei casi, supponiamo che il dato iniziale sia non negativo, limitandoci, dunque, a considerare soluzioni non negative, come si vedrà dal Teorema 2.1.

Nel Capitolo 4 ci occupiamo, invece, di *soluzioni globali*. La prima sezione è dedicata ad una breve introduzione sui sistemi dinamici, che abbiamo inserito per una conoscenza di base della terminologia tradizionalmente utilizzata nell'ambito dei problemi di evoluzione e per alcuni risultati che verranno utilizzati nella parte successiva del capitolo. Nella Sezione 4.2 definiamo in quali casi la soluzione nulla si dice *asintoticamente stabile* e in quali *esponenzialmente asintoticamente stabile* e presentiamo alcuni risultati legati a tali nozioni. Forniamo, attraverso un teorema, condizioni sufficienti per la stabilità asintotica della soluzione nulla in $L^\infty(\Omega)$ per una classe più ampia di problemi. Nell'enunciato di uno dei teoremi riportati appare nuovamente il valore q_c, se ci troviamo al di sopra del quale, la stabilità asintotica della soluzione nulla è determinata dalle caratteristiche del dominio (dalla finitezza o meno del suo raggio interno). In questa sezione presentiamo, inoltre, il metodo della *buca di potenziale* attraverso il quale otteniamo ulteriori condizioni per l'esistenza e la non esistenza globale di soluzioni. Compare, di nuovo, l'esponente p_S al di sotto del quale determiniamo due criteri rispettivamente per esistenza e non esistenza globale della soluzione di (2) in $L^\infty(\Omega)$. Nella terza sezione del capitolo definiamo diversi insiemi di dati iniziali: quelli per i quali si hanno soluzioni globali, quelli che producono soluzioni uniformemente limitate e quelli la cui relativa traiettoria tende a zero uniformemente per t che tende a infinito. Indaghiamo alcune proprietà geometriche e topologiche di tali insiemi.

Infine, nel Capitolo 5 presentiamo un risultato molto recente dovuto a T. Cazenave, F. Dickstein e F.B. Weissler che riguarda la seguente questione. Dato il problema (2) definiamo l'insieme dei dati iniziali $u_0 \in C_0(\Omega)$ la cui soluzione corrispondente è globale. Se i dati u_0 sono non negativi si dimostra facilmente che tale insieme è convesso. Si pone quindi la questione di stabilire se una tale proprietà valga anche quando i dati iniziali sono di segno variabile. Si dimostra che ciò non vale e, infatti, il relativo insieme di dati iniziali non risulta essere neppure stellato. Il caso trattato nel capitolo riguarda il problema (2) nella palla unitaria di $\mathbb{R}^N$, per $N \geq 3$, e p tale che $1 < p < p_S$ e sufficientemente vicino a p_S. Il dato iniziale è del tipo $u_0 = \theta\phi$ con $\theta > 0$ e $\phi \in C_0(\Omega)$ soluzione di segno variabile del problema stazionario. Si dimostra che u^θ, soluzione di (2) con dato iniziale $u_0 = \theta\phi$, esplode in tempo finito se $|\theta - 1|$ è sufficientemente piccolo. Si hanno, quindi, comportamenti differenti se si considerano soluzioni non negative o se si ammettono anche soluzioni di segno variabile.

Con lo scopo di rendere più chiara la trattazione abbiamo anteposto al primo capitolo un capitolo di notazioni e risultati preliminari. Vi sono elencati gli spazi di funzioni che saranno utilizzati e alcune definizioni relative alla regolarità dei domini utilizzati. Inoltre abbiamo riportato alcuni risultati classici di cui si fa uso nel corso della tesi: teoremi noti, disuguaglianze di uso comune, alcuni risultati di regolarità ed il principio di massimo per il problema ellittico.

Abbiamo inserito in Appendice alcuni concetti fondamentali per la comprensione dell'argomento affrontato nella tesi. Nell'Appendice A sono enunciati i teoremi di regolarità per problemi parabolici lineari. Nell'Appendice B sono riportati il principio di massimo e di confronto per problemi parabolici. Infine, nell'Appendice C introduciamo il *semigruppo del calore*: nella prima sezione presentiamo alcune definizioni di base, necessarie per poter enunciare il Teorema di Hille-Yosida e poter definire i semigruppi continui di contrazioni ad un parametro; nella seconda sezione vediamo brevemente come i risultati precedenti vengano applicati all'equazione del calore, definiamo il semigruppo del calore ed il nucleo del calore ed, infine, riportiamo alcune stime per il semigruppo del calore negli spazi $L^p(\Omega)$ ed una proposizione relativa alla sua proprietà di decadimento.

Capitolo 0

Notazioni e risultati preliminari

0.1 Spazi di funzioni

Sia X uno spazio di Banach e M uno spazio metrico.
Denotiamo con $C(M, X)$ l'insieme delle funzioni continue $u : x \in M \to u(x) \in X$ dotato della topologia della convergenza localmente uniforme.
Per praticità utilizzeremo anche la notazione $C(M)$ nel caso in cui $X = \mathbb{R}$.

Sia Ω un dominio arbitrario di $\mathbb{R}^N$, indichiamo con $C^k(\Omega)$, per $k \geq 1$, l'insieme delle funzioni $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tali che l'applicazione

$$x \in \Omega \to D_x^\alpha u(x) := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} u(x) \tag{1}$$

sia continua per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ $(\alpha_i \geq 0)$ con $|\alpha| \leq k$.
Diremo che una funzione $u \in C^k(\overline{\Omega})$ se le applicazioni (1), per ogni α tale che $|\alpha| \leq k$, sono continue in Ω e prolungabili in modo continuo fino alla frontiera di Ω.

Denotiamo con $C_0(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ e che soddisfano la seguente condizione: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $|u(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in \Omega \backslash K$. Lo spazio $C_0(\Omega)$ è dotato della norma dell'estremo superiore:

$$\|u\|_{C_0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{2}$$

Denotiamo con $C^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, l'insieme delle funzioni holderiane di esponente α in Ω, ossia:

$$C^\alpha(\Omega) = \Big\{ u \in C(\Omega) : \lfloor u \rfloor_{\alpha;\Omega} := \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \Big\}. \tag{3}$$

Una funzione $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ se $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)$. Sulla base della definizione (3) possiamo definire anche il seguente insieme di funzioni:

$$C^{k+\alpha}(\Omega) = \Big\{ u \in C^k(\Omega) : \tag{4}$$
$$D_x^\beta u \in C^\alpha(\Omega) \text{ per ogni multiindice } \beta \text{ tale che } |\beta| = k \Big\},$$

con $k \geq 1$ intero e $\alpha \in (0,1)$. Una funzione $u \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ se $u \in C^k(\overline{\Omega}) \cap C^{k+\alpha}(\Omega)$. Se dotiamo lo spazio $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ della seguente norma esso risulta uno spazio di Banach:

$$[u]_{k+\alpha;\Omega} := \sum_{\beta:\,|\beta|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D_x^\beta u(x)| + \sum_{\beta:\,|\beta|=k} \lfloor D_x^\beta u \rfloor_{\alpha;\mathcal{Q}_T}. \tag{5}$$

Poniamo $\mathcal{Q}_T := \Omega \times (0,T)$.
Sia $u(x,t) : \mathcal{Q}_T \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dipendente da spazio e tempo.
Diciamo che $u \in C^{k,h}(\mathcal{Q}_T)$ se u è differenziabile in modo continuo k volte in Ω rispetto alla prima variabile e h volte in $(0,T)$ rispetto alla seconda.
In analogia alle definizioni (3) e (4) introduciamo i seguenti spazi:

$$C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{Q}_T) = \Big\{ u \in C(\mathcal{Q}_T) \quad \text{tale che}$$
$$\lceil u \rceil_{\alpha;\mathcal{Q}_T} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega,\, t,s\in(0,T)\\ (x,t)\neq(y,s)}} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^\alpha + |t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} < \infty \Big\},$$

con $\alpha \in (0,1]$, e

$$C^{a,\frac{a}{2}}(\mathcal{Q}_T) = \Big\{ u \in C^k(\mathcal{Q}_T) \quad \text{tale che} \tag{6}$$
$$|u|_{a;\mathcal{Q}_T} := \sum_{\substack{\beta,\,j:\\ |\beta|+2j\leq k}} \sup_{\mathcal{Q}_T} |D_x^\beta \frac{\partial^j}{\partial t^j} u| + \sum_{\substack{\beta,\,j:\\ |\beta|+2j=k}} \lceil D_x^\beta \frac{\partial^j}{\partial t^j} u \rceil_{\alpha;\mathcal{Q}_T} < \infty \Big\},$$

in cui $a = k + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ e $k \geq 1$ intero.

Denotiamo la norma negli spazi di Lebesgue $L^p(\Omega)$ con $\|\cdot\|_{p;\Omega}$ o più semplicemente con $\|\cdot\|_p$ laddove non ci sia possibilità di confusione; denotiamo, invece, la norma negli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con $\|\cdot\|_{k,p;\Omega}$ o con $\|\cdot\|_{k,p}$. Sia $C_c^\infty(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto in Ω, come noto lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ indica la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Per gli spazi $W^{k,2}(\Omega)$, con $k \in \mathbb{N}$, e $W_0^{1,2}(\Omega)$ utilizziamo anche la notazione $H^k(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ rispettivamente.

Sia $u(x,t) : \mathcal{Q}_T \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dipendente da spazio e tempo. Lo spazio $L^p((0,T), L^q(\Omega))$, con p, $q \geq 1$, denota l'insieme delle funzioni tali che, per ogni $t \in (0,T)$ fissato, $u(\cdot, t) \in L^q(\Omega)$ e tali che la funzione $t \to \|u(\cdot,t)\|_q$ è in $L^p((0,T))$. In modo del tutto analogo si definiscono gli spazi $L^p_{loc}((0,T), L^q(\Omega))$.

Infine, denotiamo con $W^{2,1;p}(\mathcal{Q}_T)$, lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\mathcal{Q}_T)$ tali che $\frac{\partial u}{\partial t}$, $D_x u$, $D_x^2 u \in L^p(\mathcal{Q}_T)$, dotato della norma

$$\|u\|_{2,1;p;\mathcal{Q}_T} := \|u\|_{p;\mathcal{Q}_T} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{p;\mathcal{Q}_T} + \|D_x u\|_{p;\mathcal{Q}_T} + \|D_x^2 u\|_{p;\mathcal{Q}_T}.$$

Precisiamo che indichiamo con $D_x u$, o più frequentemente con ∇u, il vettore $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ e con $D_x^2 u$ la matrice il cui elemento generico è dato da $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, per $i, j = 1, ..., N$. Con un lieve abuso di notazione scriviamo $\|D_x u\|_{p;\mathcal{Q}_T}$ e $\|D_x^2 u\|_{p;\mathcal{Q}_T}$ in luogo di $\sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{p;\mathcal{Q}_T}$ e $\sum_{i,j=1}^N \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{p;\mathcal{Q}_T}$. Per praticità ometteremo la dipendenza da $\mathcal{Q}_T$ nei casi in cui non ci sia ambiguità.

Regolarità dei domini

Dato $x \in \mathbb{R}^N$, poniamo

$$\begin{aligned}
&x = (x', x_N) \ \text{ con } x' \in \mathbb{R}^{N-1},\\
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) : x_N > 0\},\\
&B = \{x = (x', x_N) : \|x'\|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1 \ e \ |x_N| < 1\},\\
&B_+ = B \cap \mathbb{R}^N_+,\\
&B_0 = \{x = (x', x_N) : \|x'\|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1 \ e \ x_N = 0\}.
\end{aligned}$$

Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ si dice di classe C^k, $k \geq 1$ intero, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x in $\mathbb{R}^N$ ed un'applicazione $H : B \to U$ biunivoca tale che

$$H \in C^k(\overline{B}), \quad H^{-1} \in C^k(\overline{U}), \quad H(B_+) = U \cap \Omega \quad e \quad H(B_0) = U \cap \partial\Omega.$$

In modo analogo si definisce un aperto di classe $C^{k+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$ e $k \geq 1$ intero.

0.2 Disuguaglianze e teoremi noti

Supponiamo Ω un dominio arbitrario di $\mathbb{R}^N$.

Disuguaglianza di Young. *Sia $1 < p < \infty$ e $p' := \frac{p}{p-1}$. Allora*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}, \qquad \textit{per ogni } a, b \geq 0. \tag{7}$$

Disuguaglianza di Hölder. *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e $p' := \frac{p}{p-1}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, allora $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{8}$$

Disuguaglianza di Hölder generalizzata. *Siano u_1, u_2, $\ldots$, u_k funzioni tali che $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, k$. Allora $u = u_1 u_2 \ldots u_k \in L^p(\Omega)$,* *con* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ *e*

$$\|u\|_p \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \dots \|u_k\|_{p_k}. \tag{9}$$

Disuguaglianza di interpolazione. *Siano* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *e* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *allora* $u \in L^r(\Omega)$ *con* $p \leq r \leq q$ *e*

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\alpha} \|u\|_q^{\alpha}, \qquad \text{con } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},\ 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{10}$$

Disuguaglianza di Jensen. *Sia* $v : \Omega \to [0, \infty)$ *una funzione misurabile tale che* $\int_\Omega v(x)dx = 1$ *e* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *convessa. Se* u *è una funzione misurabile su* Ω *e tale che* uv, $\Phi(u)v \in L^1(\Omega)$, *allora*

$$\Phi\Big(\int_\Omega u(x)v(x)dx \Big) \leq \int_\Omega \Phi(u(x))v(x)dx. \tag{11}$$

Disuguaglianza di Poincaré. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitato*[(1)] *e* $1 \leq p < \infty$. *Allora esiste una costante* $C = C(\Omega, p)$ *tale che*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{12}$$

Teorema di Young. *Siano* $1 \leq p, q \leq \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora* $u * v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *con* r *tale che* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$ *e*

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q. \tag{13}$$

Presentiamo il Teorema di Fubini ed il Teorema di Tonelli ai quali premettiamo alcune definizioni. Per maggiori dettagli e per la dimostrazione dei due teoremi si veda [2].

Siano $(\mathscr{X}, \mathscr{M}, \mu)$ e $(\mathscr{Y}, \mathscr{N}, \nu)$ due spazi di misura σ-finiti, ossia gli insiemi $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ sono costituiti da un'unione numerabile di insiemi di misura finita. Denotiamo con $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ la σ-algebra dei sottoinsiemi di $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ generata da

(1) La disuguaglianza di Poincaré vale, più in generale, anche in domini limitati in una sola direzione.

insiemi del tipo $A \times B$, con $A \in \mathscr{M}$ e $B \in \mathscr{N}$. Per ogni insieme $E \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$ poniamo:

$$E_x := \{y \in \mathscr{Y} : (x,y) \in E\},$$
$$E_y := \{x \in \mathscr{X} : (x,y) \in E\}$$
e
$$(\mu \times \nu)(E) := \int_{\mathscr{X}} \nu(E_x) d\mu = \int_{\mathscr{Y}} \mu(E_y) d\nu$$

si può dimostrare che $\mu \times \nu$ è una misura.

Teorema di Tonelli. *Sia $F(x,y)$ una funzione misurabile e non negativa in $(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}, \mathscr{M} \times \mathscr{N})$. Allora valgono i seguenti risultati.*

- *$F(x,y)$ è misurabile rispetto a x e rispetto a y.*
- *La funzione $\int_{\mathscr{Y}} F(x,y) d\nu$ è misurabile rispetto a x.*
- *La funzione $\int_{\mathscr{X}} F(x,y) d\mu$ è misurabile rispetto a y.*
- *Inoltre,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{X} \times \mathscr{Y}} F(x,y) d(\mu \times \nu) &= \int_{\mathscr{X}} d\mu \int_{\mathscr{Y}} F(x,y) d\nu \\ &= \int_{\mathscr{Y}} d\nu \int_{\mathscr{X}} F(x,y) d\mu.\end{aligned}$$

Teorema di Fubini. *Sia $F \in L^1(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$. Allora valgono i seguenti risultati.*

- *Per quasi ogni $x \in \mathscr{X}$ si ha $F(x,\cdot) \in L^1(\mathscr{Y})$ e $\int_{\mathscr{Y}} F(\cdot,y) d\nu \in L^1(\mathscr{X})$.*
- *Per quasi ogni $y \in \mathscr{Y}$ si ha $F(\cdot,y) \in L^1(\mathscr{X})$ e $\int_{\mathscr{X}} F(x,\cdot) d\mu \in L^1(\mathscr{Y})$.*
- *Inoltre,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{X} \times \mathscr{Y}} F(x,y) d(\mu \times \nu) &= \int_{\mathscr{X}} d\mu \int_{\mathscr{Y}} F(x,y) d\nu \\ &= \int_{\mathscr{Y}} d\nu \int_{\mathscr{X}} F(x,y) d\mu.\end{aligned}$$

Riportiamo il Teorema della divergenza e la formula di Green, che enunciamo nella forma più generale senza ipotesi di continuità sulle funzioni. Mostriamo, inoltre, come dalla formula di Green discenda direttamente un'identità che sarà utilizzata frequentemente.

Teorema della divergenza. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio di classe C^1. Se $w : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ allora vale la seguente identità:*

$$\int_\Omega div\big(w(x)\big)dx = \int_{\partial\Omega} w(x) \cdot \nu(x) d\sigma,$$

denotando con $\nu(x)$ il versore normale esterno a Ω in x.

Formula di Green. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato di classe C^1. Allora per ogni u, $v \in H^1(\Omega)$ e per ogni $1 \leq i \leq N$ si ha*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)d\sigma, \tag{14}$$

in cui denotiamo con $\nu_i(x)$ la componente i-esima di $\nu(x)$, versore normale esterno ad Ω in x. Precisiamo che quando integriamo u e v su $\partial\Omega$ stiamo, in realtà, intendendo la loro traccia su $\partial\Omega$.

Se supponiamo $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, possiamo considerare la funzione $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in luogo della funzione u e dunque, sommando per $i = 1, \ldots, N$, la (14) diventa

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = -\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)d\sigma.$$

Riportiamo, infine, i Teoremi di immersione per spazi di Sobolev. Li enunciamo nella forma che più ci sarà utile nel corso della trattazione: il Teorema di immersione di Sobolev per spazi $W^{m,p}(\Omega)$ (con $m \geq 1$) mentre il Teorema di Rellich-Kondrachov per spazi $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema di Immersione di Sobolev. *Sia Ω un aperto di classe C^1 con $\partial\Omega$ limitata, $m \geq 1$ intero e $1 \leq p \leq \infty$. Si ha che:*

- *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, allora $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$,*
- *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, allora $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, \infty[$,*
- *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, allora $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,*

con immersioni continue. Inoltre, nell'ultimo caso, posto $k = [m - \frac{N}{p}]$ e $\alpha = m - \frac{N}{p} - k$ si ha $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ con immersione continua.

Teorema di Rellich-Kondrachov. *Supponiamo Ω limitato di classe C^1. Si ha che:*

- *se $p < N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ con $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,*
- *se $p = N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, \infty[$,*
- *se $p > N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,*

con immersioni compatte.

0.3 Alcuni risultati per il problema ellittico

0.3.1 Teoremi di regolarità

Teorema di Agmon-Douglis-Nirenberg. *Supponiamo che Ω sia di classe C^2 con $\partial\Omega$ limitata. Sia $1 < p < \infty$. Allora, per ogni $f \in L^p(\Omega)$ esiste $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ soluzione unica dell'equazione*

$$-\triangle u(x) + u(x) = f(x) \qquad \text{in } \Omega.$$

Inoltre, se Ω è di classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$ intero), allora

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{m+2,p} \leq C\|f\|_{m,p}.$$

Teorema di Schauder. *Supponiamo che Ω sia limitato di classe $C^{2+\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Allora, per ogni $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ esiste $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ unica* *soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) + u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Inoltre, se Ω *è di classe* $C^{m+2+\alpha}$ *(*$m \geq 1$ *intero) e se* $f \in C^{m+\alpha}(\overline{\Omega})$*, allora*

$$u \in C^{m+2+\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ e } [u]_{m+2+\alpha} \leq C[f]_{m+\alpha},$$

in cui $[\cdot]_{m+\alpha}$ *denota la norma in* $C^{m+\alpha}(\overline{\Omega})$*, si veda la definizione* (5).

0.3.2 Principio di massimo

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio arbitrario,* $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e sia* $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$-\triangle u(x) + b \cdot \nabla u(x) \leq 0 \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega.$$

Principio di massimo debole. *Se* Ω *è limitato,* $u \in C(\overline{\Omega})$*,* $u(x) \leq 0$ *per* $x \in \partial\Omega$*, allora* $u(x) \leq 0$ *per* $x \in \Omega$.

Principio di massimo forte. *Se* $u(x) \leq 0$ *per* $x \in \Omega$*, allora* $u(x) \equiv 0$ *oppure* $u(x) < 0$ *in* Ω.

Lemma di Hopf. *Sia* $x_0 \in \partial\Omega$*. Supponiamo che* Ω *soddisfi la condizione di sfera interna*[(2)] *in* x_0 *e che* u *sia continua in* x_0*. Se* $u(x) \leq 0$ *in* Ω *e* $u(x_0) = 0$*, allora*

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 - t\nu(x_0))}{t} < 0,$$

dove si è denotato con $\nu(x_0)$ *la normale esterna in* x_0*. In particolare si ha che se esiste la derivata normale in* x_0 *allora* $\partial_\nu u(x_0) < 0$.

[(2)] Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Si dice che Ω soddisfa la condizione di sfera interna in x_0 se esiste una palla aperta $B_r(x_0)$ contenuta in Ω tale che $x_0 \in \partial B_r(x_0)$.

Capitolo 1

Problemi ellittici semilineari

In questo capitolo ci occuperemo dello studio del seguente problema: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e regolare

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Al variare di $p > 1$ avremo diversi risultati, in particolare distingueremo:

- $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ o $p > 1$ se $N = 2$ (caso sottocrititco);
- $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ (caso critico e sopracritico).

A tale scopo presentiamo, inizialmente, una breve introduzione sulla differenziabilità in spazi di Banach. Riportiamo, in particolare, alcuni teoremi ed esempi che utilizzeremo nello studio del problema (1.1).

1.1 Differenziabilità in spazi di Banach

1.1.1 Definizioni iniziali

Siano X e Y spazi di Banach reali, A un aperto di X e $F : A \to Y$ un'applicazione.

Definizione 1.1. *Si dice che F è differenziabile secondo Fréchet in $u \in A$ se esiste un'applicazione lineare e continua $L_u : X \to Y$ tale che*

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - L_u(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

L'applicazione L_u si chiama *differenziale* di F in u e si indica anche con $DF(u)$ oppure $F'(u)$. Si dimostra facilmente che il differenziale è unico.

Se F è differenziabile in ogni punto di A si può definire l'applicazione di derivata:

$$\begin{array}{rccc} F': & A & \longrightarrow & \mathscr{L}(X,Y) \\ & u & \longrightarrow & F'(u) \end{array}$$

dove $\mathscr{L}(X,Y)$ è lo spazio delle applicazioni lineari e continue da X in Y. F si dice di classe $C^1(A)$ se è differenziabile in ogni punto di A e F' è continua in A.

Teorema 1.1 (Regola della catena)**.** *Siano X, Y e Z spazi di Banach, $A \subset X$ e $B \subset Y$ aperti e $F : A \to B$, $G : B \to Z$ due applicazioni differenziabili in $u \in A$ ed in $F(u) = v \in B$ rispettivamente. Allora l'applicazione $G \circ F$ è differenziabile in u e si ha:*

$$(G \circ F)'(u) = G'(v) \circ F'(u).$$

Nel caso in cui $Y = \mathbb{R}$, $F'(u) \in X^*$ (spazio duale di X).
Se, inoltre, X è uno spazio di Hilbert, allora ogni elemento in X^* si può identificare con un elemento in X. Dunque, se $F'(u) \in X^*$ deve esistere un elemento di X, che indichiamo con $\nabla F(u)$, che corrisponde a $F'(u)$ tramite l'identificazione canonica, vale a dire:

$$\langle F'(u), v\rangle^{(1)} = (\nabla F(u), v) \qquad \forall v \in X,$$

(1) Dati X e Y spazi di Banach e F un'applicazione fra X e Y, utilizzeremo, in alcuni casi, il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con il significato seguente:

$$F(u) = \langle F, u\rangle, \qquad u \in X.$$

indicando con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare su X. L'elemento $\nabla F(u)$ è detto *gradiente* dell'applicazione F in u.

Diamo ora la definizione di *derivata di Gâteaux*. Essa estende al caso degli spazi di Banach la nozione di derivata direzionale.

Definizione 1.2. *Sia $F : A \to Y$. Si dice che F ha* derivata di Gâteaux *in $u \in A$ nella direzione $v \in X$ se esiste*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \frac{d}{dt}F(u+tv)|_{\ t=0}.$$

Denotiamo con $\langle F'_G(u), v\rangle$ tale limite.

Si hanno i seguenti risultati:

Proposizione 1.1. *Se F è differenziabile secondo Fréchet in $u \in A$, allora F è derivabile secondo Gâteaux in u rispetto ad ogni direzione v e si ha*

$$\langle F'(u), v\rangle = \langle F'_G(u), v\rangle.$$

Proposizione 1.2. *Se F è derivabile secondo Gâteaux in A rispetto a tutte le direzioni $v \in X$, se $F'_G(u) \in \mathscr{L}(X,Y)$ per ogni $u \in A$ e l'applicazione $u \in A \to F'_G(u) \in \mathscr{L}(X,Y)$ è continua in $u_0 \in A$, allora F è differenziabile secondo Frechét in u_0 e si ha*

$$\langle F'(u_0), v\rangle = \langle F'_G(u_0), v\rangle.$$

1.1.2 L'operatore di Nemytskii

Introdurremo ora un operatore, chiamato *operatore di Nemytskii*, ed applicheremo ad esso la teoria appena vista. Quanto segue sarà utile nella parte successiva del capitolo.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia

$$f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una funzione di Carathéodory[(2)]. Ad f si può associare un operatore, detto di Nemytskii, definito nel modo seguente:

$$N_f : u(x) \to f(x, u(x)).$$

Si dimostra che, se indichiamo con $\mathscr{M}$ l'insieme delle funzioni misurabili definite in Ω e a valori in $\mathbb{R}$, N_f manda funzioni di $\mathscr{M}$ in funzioni di $\mathscr{M}$. Vale, inoltre, il teorema seguente:

Teorema 1.2. *Supponiamo che esista una costante $c > 0$, una funzione $b(x) \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq q < \infty$ ed $r > 0$ tale che*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x) \qquad \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Allora:

1. *N_f manda $L^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$, con $p = qr$;*
2. *N_f è continuo e limitato.*

Si può dimostrare che la condizione (1.2) è anche necessaria affinché una funzione di Carathéodory definisca un operatore di Nemytskii fra spazi $L^p(\Omega)$.

Supponiamo che $f(x, s)$ sia derivabile rispetto ad s e che, denotando con $f'(x, s)$ tale derivata, $f'(x, s)$ sia di Carathéodory. Vediamo cosa accade se, inoltre, per $f'(x, s)$ vale una limitazione simile alla (1.2), cioè:

$$|f'(x, s)| \leq c|s|^m + b(x) \qquad \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

con $b(x) \in L^t(\Omega), 1 \leq t < \infty$ e $m > 0$. Dal teorema precedente si ha che:

$$N_{f'} : L^{mt}(\Omega) \to L^t(\Omega)$$

[(2)] $f(x, t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se è continua in t per quasi ogni $x \in \Omega$ ed è misurabile in x per ogni $t \in \mathbb{R}$.

e integrando la (1.3) rispetto ad s abbiamo che:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^s f'(x,\tau)d\tau\Big| \leq \int_0^s |f'(x,\tau)|d\tau \leq c\int_0^s |\tau|^m d\tau + \int_0^s b(x)d\tau \\ \leq \frac{c}{m+1}|s|^{m+1} + b(x)|s|,\end{aligned}$$

da cui segue

$$|f(x,s)| \leq \frac{c}{m+1}|s|^{m+1} + b(x)|s| + a(x), \tag{1.4}$$

con $a(x) = |f(x,0)|$. Dalla disuguaglianza di Young applicata a $b(x)|s|$ con esponenti $\frac{m+1}{m}$ e $m+1$ si ha:

$$|f(x,s)| \leq \frac{c+1}{m+1}|s|^{m+1} + \frac{m}{m+1}b(x)^{\frac{m+1}{m}} + a(x), \tag{1.5}$$

$b(x)^{\frac{m+1}{m}} \in L^{\frac{tm}{m+1}}(\Omega)$, per cui, se supponiamo che $f(x,0) \in L^{\frac{tm}{m+1}}(\Omega)$ (oppure $f(x,0) = 0$), per il teorema precedente abbiamo che:

$$\begin{aligned} N_f &: L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \qquad \text{con } p = mt \text{ e } q = \frac{mt}{m+1}, \\ N_{f'} &: L^p(\Omega) \to L^t(\Omega). \end{aligned}$$

Da quanto appena visto, applicando le disuguaglianze di Hölder e Jensen ed il Teorema di Fubini, si ha il seguente teorema:

Teorema 1.3. *Supponiamo valga (1.3) e $f(x,0) \in L^q(\Omega)$, con $q = \frac{mt}{m+1}$ (oppure $f(x,0) = 0$). Allora $N_f \in C^1(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$, con $p = mt$ e N_f' : $L^p(\Omega) \to \mathscr{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$ è definito dall'espressione seguente:*

$$N_f'(u)(v) = N_{f'}(u)(v) = f'(x,u(x))v(x) \qquad \forall u, v \in L^p(\Omega).$$

Introduciamo ora il *potenziale dell'operatore di Nemytskii.* Sia f una funzione di Carathèodory che verifica la condizione

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^m + b(x), \tag{1.6}$$

con $m > 0$, $b(x) \in L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ e denotiamo con $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$ la primitiva di f. Con conti analoghi a quelli svolti in (1.4) e (1.5) si ha:

$$|F(x,s)| \le c_2|s|^{m+1} + \frac{m}{m+1}b(x)^{\frac{m+1}{m}}. \tag{1.7}$$

Allora, dai risultati precedenti, abbiamo che:

$$\begin{aligned} N_f &: L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{m}}(\Omega), \\ N_F &: L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{m+1}}(\Omega). \end{aligned}$$

In particolare, se poniamo $m = p-1$ $(p > 1)$, la (1.6) e la (1.7) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} &|f(x,s)| \le c_1|s|^{p-1} + b(x), \text{ in cui } b(x) \in L^{p'}(\Omega), p' = \tfrac{p}{p-1}, \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1, \\ &|F(x,s)| \le c_2|s|^p + c(x), \text{ in cui } c(x) \in L^1(\Omega), \end{aligned} \tag{1.8}$$

e

$$\begin{aligned} N_f &: L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega), \\ N_F &: L^p(\Omega) \to L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Possiamo enunciare, a questo punto, il seguente teorema:

Teorema 1.4. *Supponiamo che valga (1.8), allora:*

$$\Phi(u) := \int_\Omega F(x,u(x))dx$$

definisce un funzionale continuo da $L^p(\Omega)$ in $\mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\Phi'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \forall v \in L^p(\Omega)$.

Consideriamo ora il seguente funzionale definito in $H_0^1(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

aperto di classe C^1 e $\partial\Omega$ limitata:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx, \tag{1.9}$$

in cui $F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau)d\tau$. Supponiamo che $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia di Carathéodory e soddisfi la seguente condizione di crescita:

$$|f(x, s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x) \qquad 1 < p \leq \tfrac{2N}{N-2}, \quad se\ N \geq 3;$$
$$1 < p < \infty \quad se\ N = 2;$$

$b(x) \in L^{p'}(\Omega)$, con p' tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Vediamo che J è di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$.
Poiché siamo nelle ipotesi (1.8), possiamo applicare il Teorema 1.4. Dunque, se chiamiamo

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

sappiamo che il funzionale $\Phi(u)$ è di classe $C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx \qquad \forall u, v \in L^p(\Omega).$$

Analogo risultato si ha se $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Infatti, dal Teorema di immersione di Sobolev, segue che:

$$0 < \frac{|\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi'(u)(v)|}{\|v\|_{1,2}} = \underbrace{\frac{|\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi'(u)(v)|}{\|v\|_p}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\frac{\|v\|_p}{\|v\|_{1,2}}}_{\text{limitato}}$$

quindi Φ è differenziabile in $H_0^1(\Omega)$. Per quanto riguarda il primo addendo del funzionale, se chiamiamo

$$G(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx,$$

si verifica facilmente che $G(u)$ è differenziabile in $H_0^1(\Omega)$ e che

$$G'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Quindi J è differenziabile in $H_0^1(\Omega)$.

1.1.3 Punti estremali e varietà hilbertiane

Sia X uno spazio di Banach ed $F : A(\subseteq X) \to \mathbb{R}$.

Definizione 1.3 (Punti estremali). *Si dice che F ha un punto di minimo (risp. massimo) relativo in $u_0 \in A$ se esiste un intorno $U \subseteq A$ di u_0 tale che:*

$$\begin{array}{ll} F(w) \geq F(u_0) & \forall\, w \in U. \\ (risp.\ F(w) \leq F(u_0)) & \end{array}$$

Se la disuguaglianza è stretta per ogni $w \in U$ tale che $w \neq u_0$, allora F ha un punto di minimo (risp. massimo) relativo stretto in $u_0 \in U$.

Proposizione 1.3. *Se F è differenziabile e u_0 è un punto di minimo (massimo) relativo, allora $F'(u_0) = 0$.*

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che ogni derivata direzionale è nulla. Si ha:

$$\langle F'_G(u_0), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t} = \frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Psi(t)\bigg|_{t=0}$$

in cui, per ogni $v \in X$, Ψ è la funzione reale composta definita come segue:

$$\Psi(t) = F(u_0 + tv) \in \mathbb{R}.$$

Poiché Ψ è derivabile in 0 e 0 è un punto di minimo (massimo) per Ψ, allora $\Psi'(0) = 0$ e questo vale per ogni direzione v. Segue che $F'(u_0) = 0$. □

Sia $F : A(\subseteq X) \to \mathbb{R}$ un funzionale differenziabile secondo Fréchet. Si dice che $u_0 \in A$ è un *punto critico* di F se è tale che $F'(u_0) = 0$. In tale caso

$F(u_0)$ si dice *valore critico*. Se u_0 è un punto critico, allora, per definizione,

$$F'(u_0) = 0 \Longleftrightarrow F'(u_0)(w) = 0 \qquad \forall\, w \in A.$$

Questa equazione prende il nome di *equazione di Eulero* del funzionale F.

Introdurremo, ora, il concetto di sottovarietà in spazi di Hilbert ma prima enunciamo il Teorema della funzione implicita per spazi di Banach.

Teorema 1.5 (Teorema della funzione implicita)**.** *Siano Λ, X, Y spazi di Banach, $F \in C^1(\Sigma, Y)$, in cui Σ è un aperto di $\Lambda \times X$. Supponiamo che $F(\lambda_0, u_0) = 0$ e $F_u(\lambda_0, u_0)$ sia invertibile con inversa continua.*
Allora esiste un intorno U di λ_0 in Λ, un intorno V di u_0 in X ed un'applicazione $g : U \to V$ di classe C^1 tale che:

- *$F(\lambda, g(\lambda)) = 0$, $\forall \lambda \in U$;*
- *se $F(\lambda, u) = 0$ $(\lambda, u) \in U \times V$, allora $u = g(\lambda)$;*
- *$g'(\lambda) = -[F_u(\lambda, g(\lambda))]^{-1} F_\lambda(\lambda, g(\lambda))$, $\forall \lambda \in U$.*

Sia H uno spazio di Hilbert e $g \in C^1(H, \mathbb{R})$. Sia $M = \{u \in H : g(u) = 0\}$ e supponiamo che $\forall\ u \in M\ g'(u) \neq 0$, allora M si definisce *sottovarietà hilbertiana di codimensione uno e di classe C^1 in H associata al funzionale g.*

Definiamo lo *spazio tangente* a M in un punto $u_0 \in M$ come il sottospazio chiuso di H definito da

$$T_M(u_0) = \{u \in H : (\nabla g(u_0), u) = 0\},$$

mentre il sottospazio unidimensionale

$$N_M(u_0) = \{t \nabla g(u_0), t \in \mathbb{R}\}$$

è detto *sottospazio ortogonale* a M in u_0 ed è generato dal versore

$$\nu(u_0) = \frac{\nabla g(u_0)}{\|\nabla g(u_0)\|_H}.$$

Lo spazio di Hilbert H è somma diretta di $T_M(u_0)$ e $N_M(u_0)$.

Se $f \in C^1(H,\mathbb{R})$ e $u_0 \in M$, la *derivata tangenziale* di f in u_0, che denotiamo con $f'_M(u_0)$, è la componente tangenziale di $\nabla f(u_0)$, cioè

$$\begin{aligned} f'_M(u_0) &= \nabla f(u_0) - (\nabla f(u_0), \nu(u_0))\nu(u_0) \\ &= \nabla f(u_0) - \frac{(\nabla f(u_0), \nabla g(u_0))}{\|\nabla g(u_0)\|_H^2}\nabla g(u_0). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Riportiamo ora il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange che sfrutteremo nella parte successiva del capitolo. Nella sua dimostrazione faremo uso del Teorema della funzione implicita.

Teorema 1.6 (dei moltiplicatori di Lagrange[(3)]). *Sia g un funzionale di classe $C^1(H,\mathbb{R})$, M una sottovarietà di H di codimensione uno e di classe C^1 associata a g e $f \in C^1(H,\mathbb{R})$ tale che f ha in $u_0 \in M$ un estremo relativo vincolato a M, allora $\langle f'(u_0), v\rangle = 0$ $\forall\ v \in T_M(u_0)$ ed esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f'(u_0) = \alpha g'(u_0)$.*

Dimostrazione. Sia $g_1 : T_M(u_0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita nel modo seguente:

$$g_1(v,t) := g(u_0 + v + t\nabla g(u_0)) \qquad \forall v \in T_M(u_0), \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Si ha $g_1(0,0) = g(u_0) = 0$, poiché $u_0 \in M$. Inoltre

$$\begin{aligned} &\langle \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0), v\rangle = \langle g'(u_0), v\rangle = 0, \qquad \text{per } v \in T_M(u_0), \\ &\frac{\partial g_1}{\partial t}(0,0) = \|\nabla g(u_0)\|_H^2 > 0. \end{aligned}$$

(3) Il teorema può essere generalizzato al caso in cui la varietà M sia descritta tramite più vincoli. Inoltre, può essere esteso anche al caso in cui l'insieme X sia solo uno spazio di Banach.

Allora, per il Teorema della funzione implicita, esiste un'applicazione h definita in un intorno U di 0 in $T_M(u_0)$ a valori in un intorno V di 0 in $\mathbb{R}$ tale che $h(0) = 0$ e localmente $t = h(v)$ se e solo se $g_1(v,t) = g(u_0 + v + t\nabla g(u_0)) = 0$. Inoltre, dal Teorema della funzione implicita, abbiamo anche che:

$$\langle h'(0), v\rangle = -\frac{\langle \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0), v\rangle}{\|\nabla g(u_0)\|_H^2} = -\frac{\langle g'(u_0), v\rangle}{\|\nabla g(u_0)\|_H^2} = 0 \qquad \forall v \in T_M(u_0).$$

Sia $F : U \to \mathbb{R}$ tale che $F(v) = f(u_0 + v + h(v)\nabla g(u_0))$. La funzione F ha in zero un estremo relativo, poiché $h(0) = 0$ e per ipotesi f ha in u_0 un estremo relativo vincolato a M e, dalla definizione di h, $(u_0 + v + h(v)\nabla g(u_0)) \in M$. Dunque $F'(0) = 0$, cioè

$$\langle F'(0), v\rangle = 0 \qquad \forall v \in T_M(u_0).$$

Ma allora, poiché

$$\begin{aligned}\langle F'(0), v\rangle &= \langle f'(u_0) \circ (I + h'(0)\nabla g(u_0)), v\rangle \\ &= \langle f'(u_0), [v + \langle h'(0), v\rangle \nabla g(u_0)]\rangle, \qquad \forall v \in T_M(u_0),\end{aligned}$$

e $\langle h'(0), v\rangle = 0$ $\forall v \in T_M(u_0)$, abbiamo che

$$\langle F'(0), v\rangle = \langle f'(u_0), v\rangle = 0, \qquad \forall v \in T_M(u_0).$$

Dalla (1.10) si ha che:

$$\begin{aligned}(f'_M(u_0), v) &= (\nabla f(u_0), v) - \frac{(\nabla f(u_0), \nabla g(u_0))}{\|\nabla g(u_0)\|_H^2}(\nabla g(u_0), v) \\ &= (\nabla f(u_0), v) = 0 \qquad \forall v \in T_M(u_0),\end{aligned}$$

ma, poiché per definizione $f'_M(u_0) \in T_M(u_0)$, deve essere $f'_M(u_0) = 0$. Dunque $\nabla f(u_0) \in N_M(u_0)$, e allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f'(u_0) = \alpha g'(u_0)$. $\square$

1.2 Analisi del problema ellittico

Dato il problema ellittico semilineare:

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x, u(x)) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

una soluzione del problema in senso classico è una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che soddisfa (1.11) per ogni $x \in \Omega$ e tale che $u(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega$. Una soluzione debole è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Se torniamo, per un attimo, al funzionale definito in (1.9), cioè:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x)) dx,$$

sulla base di quanto visto, si ha che

$$J'(u) = 0 \Longleftrightarrow u \text{ è soluzione debole del problema (1.11).}$$

1.2.1 Caso sottocritico

Ci occupiamo ora, come anticipato a inizio capitolo, di determinare l'esistenza e la regolarità delle soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = |u(x)|^{p-1} u(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato di classe C^2 e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, $p > 1$ se $N = 2$.

Trasformeremo questo problema in un problema di minimo vincolato:

minimizzare il funzionale

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

sul vincolo $M = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = 1\}$.

Osserviamo che:

- G è coercivo[(4)] su $H_0^1(\Omega)$, infatti:

$$\lim_{\|u\|_{1,2} \to +\infty} G(u) = \lim_{\|u\|_{1,2} \to +\infty} \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 = +\infty;$$

- G è debolmente semicontinuo inferiormente[(5)] perché questo vale per la funzione norma;

- l'insieme M è debolmente chiuso in $H_0^1(\Omega)$, infatti: sia $\{u_n\} \subset M$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$, allora, per il Teorema di Rellich-Kondrachov sulle immersioni compatte, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \to u$ in $L^{p+1}(\Omega)$ e quindi $\|u\|_{p+1} = 1$, cioè $u \in M$.

Da queste osservazioni, applicando il teorema che segue, possiamo concludere che il funzionale G raggiunge il minimo in un punto $w \in M$.

Teorema 1.7. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $M \subset X$ un sottoinsieme debolmente chiuso. Supponiamo che il funzionale $\Phi : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia coercivo su M e debolmente semicontinuo inferiormente su M, allora Φ è limitato inferiormente e raggiunge il minimo su M.*

Dimostrazione. Sia $m := \inf_{u \in M} \Phi(u)$ e sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante, cioè tale che $u_n \in M\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\Phi(u_n) \xrightarrow{n \to \infty} m$. Per la coercività di

(4) Un funzionale $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è coercivo su $M \subseteq X$ se:

$$\lim_{\|u\|_X \to +\infty} \Phi(u) = +\infty, \qquad u \in M.$$

(5) Un funzionale $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è debolmente semicontinuo inferiormente se:

$$\forall \{u_n\} \subset X \text{ e } u_n \rightharpoonup u \text{ in } X, \qquad \Phi(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} \Phi(u_n).$$

Φ la successione $\{u_n\}$ deve essere limitata, infatti se così non fosse avremmo $\Phi(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e dunque un assurdo. Poiché X è uno spazio riflessivo esiste un'estratta $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente, per questo risultato si veda [2] Teorema III.27. Sia $u_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} u \in X$. L'insieme M è debolmente chiuso e dunque $u \in M$. Dalla semicontinuità inferiore di Φ segue che

$$m = \liminf_{k\to\infty} \Phi(u_{n_k}) \geq \Phi(u),$$

da cui si ha che $u \in M$ è punto di minimo per Φ. $\square$

Poiché $G(u) = G(|u|)$, possiamo supporre $w \geq 0$ in Ω. Abbiamo già osservato che G è di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$.

Introduciamo ora un nuovo funzionale:

$$F(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx - 1.$$

Anche F è di classe C^1 su $H_0^1(\Omega)$ e si ha:

$$\begin{aligned} \langle G'(u), v\rangle &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \\ \langle F'(u), v\rangle &= (p+1) \int_\Omega |u(x)|^{p-1} u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

In particolare $\langle F'(u), u\rangle = (p+1)\int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = p+1 \neq 0 \quad \forall u \in M$ e quindi M è una sottovarietà di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$. Allora dal Teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue che esiste un parametro $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle G'(w) - \mu F'(w), v\rangle = \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) - \mu |w(x)|^{p-1} w(x) v(x)\, dx = 0 \quad (1.13)$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Ponendo $v = w$, si ha

$$2G(w) = \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx = \mu \int_\Omega |w(x)|^{p+1} dx = \mu,$$

da cui si ha $\mu > 0$. Allora, se consideriamo la funzione $u(x) = \mu^{\frac{1}{p-1}} w(x)$, si verifica facilmente che essa risulta essere soluzione debole del problema

(1.12). Infatti:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)dx = \\
&\mu^{\frac{1}{p-1}}\int_\Omega \nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx - \left(\mu^{\frac{1}{p-1}}\right)^p\int_\Omega |w(x)|^{p-1}w(x)v(x)dx = \\
&\mu^{\frac{1}{p-1}}\left[\int_\Omega \nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx - \mu\int_\Omega |w(x)|^{p-1}w(x)v(x)dx\right] = 0,
\end{aligned}
$$

in cui l'ultima uguaglianza è data dalla (1.13). Inoltre la soluzione trovata è non negativa in Ω.

Con alcune osservazioni sulla regolarità di tale soluzione, dimostreremo che, in realtà, u è anche soluzione classica di (1.12). Riscriviamo il problema (1.12) nella forma

$$
\begin{cases}
-\triangle u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\
u(x) = 0 & x \in \partial\Omega,
\end{cases}
$$

con $f(x) = |u(x)|^{p-1}u(x)$; la soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ e quindi per il Teorema di immersione di Sobolev $u \in L^{q_1}(\Omega)$, con $q_1 = \frac{2N}{N-2}$, dunque $f(x) \in L^{\frac{q_1}{p}}(\Omega)$.

Poiché Ω è di classe C^2, per il Teorema di regolarità di Agmon-Douglis-Nirenberg (pag.8), si ha che $u \in W^{2,\frac{q_1}{p}}(\Omega)$. Sfruttando di nuovo il Teorema di immersione di Sobolev, abbiamo che si possono verificare i seguenti casi:

- se $\frac{p}{q_1} \leq \frac{2}{N}$, allora $u \in L^q(\Omega)\ \forall q < \infty$ e $u \in L^\infty(\Omega)$ se vale la disuguaglianza stretta;

- se $\frac{p}{q_1} > \frac{2}{N}$, allora $u \in L^{q_2}(\Omega)$, con $\frac{1}{q_2} = \frac{p}{q_1} - \frac{2}{N}$. Si ha che $q_2 > q_1$ se e solo se $p < \frac{N+2}{N-2}$, cioè si guadagna di sommabilità se e solo se $p < \frac{N+2}{N-2}$. Infatti:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{q_2} = \tfrac{p}{q_1} - \tfrac{2}{N} < \tfrac{1}{q_1} &\Leftrightarrow\quad &\tfrac{p-1}{q_1} < \tfrac{2}{N} &\Leftrightarrow \\
&q_1 > \tfrac{N(p-1)}{2} &\Leftrightarrow\quad &\tfrac{2N}{N-2} > \tfrac{N(p-1)}{2} &\Leftrightarrow \\
&\tfrac{pN}{2} < \tfrac{2N}{N-2} + \tfrac{N}{2} &\Leftrightarrow\quad &p < \tfrac{N+2}{N-2}.
\end{aligned}
$$

Dunque, $u \in L^{q_2}(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{q_2}{p}}(\Omega)$. Analogamente a prima si ha, quindi, che $u \in W^{2,\frac{q_2}{p}}(\Omega) \subset L^{q_3}(\Omega)$, con $\frac{1}{q_3} = \frac{p}{q_2} - \frac{2}{N}$. Possiamo costruire, in questo modo, una successione di esponenti q_k tale che:

$$\frac{1}{q_{k+1}} = \frac{p}{q_k} - \frac{2}{N} \tag{1.14}$$

in cui si ha che $q_{k+1} > q_k$, infatti:

$$\frac{1}{q_{k+1}} = \frac{p}{q_k} - \frac{2}{N} < \frac{1}{q_k} \iff q_k > \frac{(p-1)N}{2}$$

e ciò è verificato già da q_1, poiché stiamo supponendo $p < \frac{N+2}{N-2}$. Dunque $\{q_k\}$ è una successione crescente. Per determinare il suo comportamento all'infinito basta osservare che: se fosse $q_k \xrightarrow{k\to\infty} l$, allora, passando al limite su k nella (1.14), otterremmo $\frac{1}{l} = \frac{p}{l} - \frac{2}{N}$, il che implica $l = \frac{(p-1)N}{2}$. Ciò è impossibile in quanto già $q_1 > \frac{(p-1)N}{2}$. Dunque deve risultare $q_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$.

Abbiamo così provato che $u \in L^q(\Omega)\ \forall q < \infty$, chiaramente la stessa cosa vale anche per $f(x)$ e da questo discende che $u \in W^{2,q}(\Omega)$, $\forall q < \infty$.
In particolare, per q tale che $\frac{1}{q} - \frac{2}{N} < 0$ (cioè $q > \frac{N}{2}$), dal Teorema di immersione di Sobolev si ha che $u \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, in cui $k = [2 - \frac{N}{q}]$ e $\alpha = 2 - \frac{N}{q} - k$. Dunque, se $q > N$ si ha $k > 1$ e $W^{2,q}(\Omega) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, ciò è vero $\forall\, \alpha < 1$ a patto di scegliere q sufficientemente grande.
Con ragionamento analogo si dimostra che $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e dalle stime di Schauder (pag.8) si conclude che, se supponiamo Ω di classe $C^{2+\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$), allora $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Dunque u è anche soluzione classica.

Abbiamo già sottolineato che la soluzione u è non negativa in Ω. Aggiungiamo però un'osservazione: la soluzione ha l'espressione $u = \mu^{\frac{1}{p-1}} w$, in cui $w \not\equiv 0$ essendo $w \in M$ e $\mu > 0$, dunque anche $u \not\equiv 0$ in Ω. Possiamo quindi applicare il principio di massimo forte (pag.9) da cui abbiamo che $u > 0$ in Ω.

1.2.2 Caso critico e sopracritico

Il procedimento appena visto, chiaramente, non può essere applicato per $p \geq \frac{N+2}{N-2}$, infatti, per tali p l'immersione di Sobolev non è compatta. Per p critico e sopracritico si hanno dei risultati di non esistenza, per dimostrare i quali utilizzeremo la seguente identità.

Proposizione 1.4 (Identità di Pohozaev). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato di classe C^1 e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una soluzione classica dell'equazione*

$$-\triangle u(x) = f(u(x)), \qquad x \in \Omega, \tag{1.15}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Allora, denotando con $\nu = \nu(x)$ il versore normale esterno su $\partial\Omega$ e con $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ la primitiva di f, si ha:

$$N \int_\Omega F(u(x))dx - \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \tag{1.16}$$
$$\int_{\partial\Omega} F(u(x))(x \cdot \nu)d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)(x \cdot \nabla u)d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 (x \cdot \nu)d\sigma.$$

Dimostrazione. Moltiplicando entrambi i membri di (1.15) per $x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, integrando e sommando sulle coordinate, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega (-\triangle u(x)) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega f(u(x)) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx. \tag{1.17}$$

Se consideriamo il campo vettoriale $F(u)x$ abbiamo che

$$div(F(u)x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(F(u)x_i) = \sum_{i=1}^N f(u)x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + NF(u)$$

dunque, applicando il Teorema della divergenza il secondo membro della

(1.17) si può scrivere nel modo seguente

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega f(u(x))x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \int_\Omega div(F(u(x))x)dx - N\int_\Omega F(u(x))dx$$
$$= \int_{\partial\Omega} F(u(x))(x\cdot\nu)d\sigma - N\int_\Omega F(u(x))dx.$$

Inoltre abbiamo anche che

$$div(\nabla u\, x_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i}) = \triangle u\; x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}x_i + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\delta_{ij}$$

da cui, applicando di nuovo il Teorema della divergenza, deduciamo che il primo membro della (1.17), a meno di un segno, può essere riscritto nel modo seguente

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \triangle u(x)\; x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\Omega}(\nabla u(x)\; x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\cdot\nu\; d\sigma +$$

$$\textstyle- \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)x_i dx - \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\delta_{ij}dx =$$

$$\textstyle= \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)d\sigma - \sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))^2x_i dx +$$

$$\textstyle- \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\int_\Omega(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))^2dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)d\sigma +$$

$$\textstyle+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))^2dx - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\partial\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))^2x_i\nu_i d\sigma - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))^2dx,$$

in cui l'ultima uguaglianza è ottenuta sfruttando il Teorema della divergenza. Dunque, sostituendo le espressioni trovate possiamo scrivere la (1.17) nel modo seguente

$$\textstyle\int_{\partial\Omega}F(u(x))(x\cdot\nu)d\sigma - N\int_\Omega F(u(x))dx =$$

$$\textstyle= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))^2dx - \sum_{j=1}^{N}\frac{N}{2}\int_\Omega(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))^2dx +$$

$- \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) d\sigma + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))^2 x_i \nu_i d\sigma =$

$= (1 - \frac{N}{2}) \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 (x \cdot \nu) d\sigma - \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial \nu}(x))(x \cdot \nabla u) d\sigma.$

□

Osservazione 1.1. Per definizione $F(0) = 0$, dunque, se aggiungiamo alla (1.15) la condizione di Dirichlet, $u(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$, si ha che $F(u(x)) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ e la (1.16) diventa

$$N \int_{\Omega} F(u(x)) dx + \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int_{\Omega} u(x) f(u(x)) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\sigma, \tag{1.18}$$

poiché dall'equazione discende che $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(u(x)) u(x) dx$ e per $x \in \partial\Omega$ $\nu(x) = -\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$, $|\nabla u(x)|^2 = (\frac{\partial u}{\partial \nu}(x))^2$ e $(x \cdot \nabla u(x)) = -|\nabla u(x)|(x \cdot \nu) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)(x \cdot \nu)$.

Consideriamo il problema (1.12) nel caso critico, cioè

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = |u(x)|^{p-1} u(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $p = \frac{N+2}{N-2}$. Utilizzando l'identità (1.18) con $f(u(x)) = |u(x)|^{p-1} u(x)$, otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\sigma = \frac{N}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx + \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = 0, \tag{1.19}$$

poiché $p = \frac{N+2}{N-2}$. Se supponiamo che Ω sia strettamente stellato**(6)**, abbiamo che $(x \cdot \nu) > 0$ $\forall x \in \partial\Omega$, e quindi dalla (1.19) segue che $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0$ per ogni

(6) Un insieme aperto A si dice *stellato* (rispetto a 0) se $\forall x \in \overline{A}$, il segmento $\{\lambda x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq \overline{A}$. Se ∂A è regolare e A è stellato, allora $(x \cdot \nu(x)) \geq 0$ $\forall x \in \partial A$.
L'insieme A si dice *strettamente stellato* se è stellato e la precedente disuguaglianza vale in senso stretto $\forall x \in \partial A$.

$x \in \partial\Omega$ e

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^{p-1}u(x)dx &= \int_\Omega -\triangle u(x)dx = \int_\Omega -(div\nabla u(x))dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \nabla u(x)\cdot \nu d\sigma = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} d\sigma = 0. \quad (1.20)\end{aligned}$$

Dunque, se siamo interessati a soluzioni non negative, abbiamo che l'unica possibilità è che sia u identicamente nulla.

Ad un risultato analogo si giunge anche ammettendo soluzioni di segno variabile. Sia u una soluzione di questo tipo, allora u^+ e u^- soddisfano (1.12) in $\Omega^+ = \{u \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{u \leq 0\}$ rispettivamente. Allora o Ω^+ o Ω^- deve avere intersezione con $\partial\Omega$ di misura positiva. Supponiamo sia Ω^+ tale insieme (in modo simile si ragiona per Ω^-), in corrispondenza dei punti di $\Omega^+ \cap \partial\Omega$ si ha, per il Lemma di Hopf (pag.9), $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ il che è assurdo in quanto dalla (1.19) avevamo dedotto che $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Vediamo ora cosa accade se $p > \frac{N+2}{N-2}$. Nella (1.19) si ha

$$\underbrace{\frac{2N-(N-2)(p+1)}{2(p+1)}}_{<0} \int_\Omega |u(x)|^{p+1}dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \quad (1.21)$$

e quindi, se supponiamo Ω stellato, otteniamo che u deve essere identicamente nulla, sia nel caso di una soluzione u non negativa, sia nel caso di una u che cambi segno.

Se ci limitiamo alla ricerca di soluzioni non negative, si può applicare l'identità di Pohozaev anche nel caso in cui p è critico e $(x \cdot \nu) \geq 0$ $\forall x \in \partial\Omega$. Supponiamo sia u non identicamente nulla, allora, per il principio di massimo forte (pag.9), $u > 0$ e dunque, per il Lemma di Hopf, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0$ $\forall x \in \partial\Omega$, e quindi dalla (1.19) risulta $(x \cdot \nu) = 0$ $\forall x \in \partial\Omega$ ma, allora, Ω dovrebbe essere l'intero semispazio.

Capitolo 2

Introduzione ai problemi parabolici semilineari

2.1 Definizioni iniziali

Nel seguente capitolo ci occuperemo dello studio di problemi parabolici del tipo:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = f(u(x,t)) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,t) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, ed f è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ con crescita sopralineare. In particolare considereremo il caso $f(u) = |u|^{p-1}u$ con $p > 1$. Iniziamo riportando alcune definizioni di soluzione per il problema (2.1).

Definizione 2.1. *Sia X uno spazio di Banach di funzioni definite in Ω, $u_0 \in X$ e $T \in (0,\infty]$, allora $u \in C([0,T),X)$ è soluzione classica (X-soluzione classica) di (2.1) in $[0,T)$ se $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\overline{\Omega} \times (0,T))$, $u(x,0) = u_0(x)$ $\forall x \in \Omega$ ed u è soluzione classica di (2.1) per ogni $t \in (0,T)$. Se Ω è illimitato si chiede, inoltre, che sia $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$.*
Se $X = L^\infty(\Omega)$, non si chiede $u \in C([0,T),X)$ ma $u \in C((0,T),X)$ e $\|u(t) - e^{t\triangle}u_0\|_\infty \xrightarrow{t\to 0} 0$, dove con $e^{t\triangle}$ si denota il semigruppo del calore relativo al problema di Dirichlet in Ω (Appendice C).

Diremo che il problema (2.1) è *ben posto* in X se, dato $u_0 \in X$, esiste un tempo $T > 0$ tale che il problema (2.1) ammetta un'unica X-soluzione classica in $[0, T]$.

Se u è una $L^q(\Omega)$-soluzione classica di (2.1) in $[0, T)$, essa soddisfa la seguente identità (*formula di variazione delle costanti*)

$$u(\cdot, t) = e^{(t-\tau)\triangle} u(\cdot, \tau) + \int_\tau^t e^{(t-s)\triangle} f(u(\cdot, s)) ds, \qquad 0 < \tau < t < T. \quad (2.2)$$

Infatti, applicando l'operatore $e^{(t-s)\triangle}$ all'equazione $u_s(\cdot, s) - \triangle u(\cdot, s) = f(u(\cdot, s))$ ed integrando rispetto ad s in (τ, t), utilizzando l'uguaglianza, che si può verificare tenendo conto di $(C.4)$, $\frac{d}{ds}(e^{(t-s)\triangle} u(\cdot, s)) = e^{(t-s)\triangle}(u_s(\cdot, s) - \triangle u(\cdot, s))$, si ottiene la (2.2).

Definizione 2.2. *Una funzione $u \in C([0, T), L^q(\Omega))$, tale che $f(u) \in L^1((0, T), L^q(\Omega))$, $u(x, 0) = u_0(x) \forall x \in \Omega$ e che soddisfa la (2.2) è detta $L^q(\Omega)$-soluzione mild del problema (2.1).(Se $q = \infty$ la definizione viene modificata in modo analogo alla precedente (Definizione 2.1)).*

Chiaramente ogni soluzione classica è anche soluzione mild, mentre, in generale, non è vero il viceversa.

Definizione 2.3. *Supponiamo Ω limitato e $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$*[(1)]. *Una funzione $u \in C([0, T), L^1_\delta(\Omega))$ è una soluzione debole ($L^1_\delta(\Omega)$-soluzione debole) di (2.1) in $[0, T)$ se u, $\delta f(u) \in L^1_{loc}((0, T), L^1(\Omega))$, $u(x, 0) = u_0(x) \, \forall x \in \Omega$ e*

$$\int_\tau^t \int_\Omega f(u) \varphi dx ds = -\int_\tau^t \int_\Omega u(\varphi_t + \triangle \varphi) dx ds - \int_\Omega u(\tau) \varphi(\tau) dx ds \quad (2.3)$$

[(1)] Gli spazi di Lebesgue con peso L^p_δ sono definiti nel modo seguente: sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$L^p_\delta(\Omega) := L^p(\Omega; \delta(x) dx) \qquad \forall \, 1 \le p < \infty$$

dotati della norma

$$\|u\|_{p,\delta} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \delta(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

in cui $\delta(x) := dist(x, \partial\Omega)$.

per ogni $0 < \tau < t < T$ *e per ogni* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times [\tau, t])$, *tale che* $\varphi(x, s) = 0$ $\forall (x, s) \in \partial\Omega \times [\tau, t]$ *e* $\varphi(x, t) = 0 \, \forall x \in \Omega$.

Riportiamo due proposizioni che utilizzeremo nella sezione successiva. La prima è un risultato di unicità per soluzioni deboli. La seconda afferma che, sotto opportune ipotesi di regolarità del dominio, ogni soluzione mild di (2.1) è anche soluzione debole.

Proposizione 2.1. *Sia* Ω *un dominio limitato e di classe* $C^{2+\alpha}$, *con* $\alpha \in (0, 1)$, *e* $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$. *Se* $f \in L^1_{loc}([0, T), L^1_\delta(\Omega))$ *il problema (2.1), con dato iniziale* u_0, *ammette una unica* $L^1_\delta(\Omega)$*-soluzione debole.*

Proposizione 2.2. *Consideriamo* Ω *un dominio limitato e di classe* $C^{2+\alpha}$, *con* $\alpha \in (0, 1)$, *e* $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$. *Sia* $q \geq 1$ *ed* u *una* $L^q(\Omega)$*-soluzione mild del problema (2.1) con dato iniziale* u_0, *allora* u *è una* $L^1_\delta(\Omega)$*-soluzione debole di (2.1).*

Per la dimostrazione della Proposizione 2.1 e della Proposizione 2.2 si veda [14].

2.2 Esistenza e non esistenza locale di soluzioni

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $p > 1$.

Supponiamo $u_0 \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$. Riportiamo due risultati, studiati da F.B. Weissler in [18] e [19] e più tardi da altri, fra cui H. Brezis e T. Cazenave in [3], che mettono in evidenza come $q = \frac{N(p-1)}{2}$ risulti un esponente critico.

Teorema 2.1. *Sia $p > 1$, $u_0 \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, $q > \frac{N(p-1)}{2}$. Allora esiste un tempo $T = T(\|u_0\|_q) > 0$ tale che il problema (2.4) possiede un'unica $L^q(\Omega)$-soluzione classica in $[0,T)$ e per ogni $t \in (0,T)$ e $r \in [q,\infty]$ vale la stima seguente:*

$$\|u(t)\|_r \leq C\|u_0\|_q t^{-\alpha_r}, \qquad \alpha_r := \frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right), \tag{2.5}$$

in cui $C = C(N,p,q) > 0$. Inoltre, $u \geq 0$ se $u_0 \geq 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in diversi passi.

Primo passo. Iniziamo provando esistenza e unicità di una funzione u verificante (2.2) con $\tau = 0$ per il problema (2.4) (sfruttando la proprietà di semigruppo di $e^{t\triangle}$ si ha che la (2.2) risulta valida anche per $\tau \in (0,T)$). A tale scopo utilizzeremo un teorema di punto fisso in uno spazio di Banach che definiremo fra poco. Possiamo assumere $\|u_0\|_q > 0$ e considerare un tempo piccolo $T > 0$; definiamo allora il seguente spazio di Banach:

$$Y_T := \{u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^{pq}(\Omega)) : \|u\|_{Y_T} < \infty\} \tag{2.6}$$

con $\|u\|_{Y_T} := \sup\limits_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{pq}$,

in cui $\alpha := \frac{N(p-1)}{2pq} < \frac{1}{p} < 1$.
Sia $M > \|u_0\|_q$ e indichiamo con $B_M = B_{M,T}$ la palla chiusa in Y_T di centro 0 e raggio M. Definiamo, allora, la seguente applicazione

$$\Phi_{u_0}(u)(t) := e^{t\triangle}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\triangle}|u(s)|^{p-1}u(s)ds.$$

Per ogni $u, v \in B_M$ e $v_0 \in L^q(\Omega)$ si ha che

$$\begin{aligned} &t^\alpha \|\Phi_{u_0}(u)(t) - \Phi_{v_0}(v)(t)\|_{pq} \leq \\ &\leq t^\alpha \|e^{t\triangle}(u_0 - v_0)\|_{pq} + t^\alpha \int_0^t \|e^{(t-s)\triangle}(|u(s)|^{p-1}u(s) - |v(s)|^{p-1}v(s))\|_{pq}ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Per le proprietà di $e^{t\triangle}$, in particolare applicando il punto (d) della Proposizione C.3 in Appendice con esponenti pq e q, possiamo maggiorare il secondo membro di (2.7) nel modo seguente

$$\begin{aligned} &t^\alpha \|\Phi_{u_0}(u)(t) - \Phi_{v_0}(v)(t)\|_{pq} \leq \\ &\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0 - v_0\|_q + t^\alpha \int_0^t [4\pi(t-s)]^{-\alpha}\|(|u(s)|^{p-1}u(s) - |v(s)|^{p-1}v(s))\|_q ds \\ &\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0 - v_0\|_q + C(p)t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|(|u(s)|^{p-1} + |v(s)|^{p-1})|u(s) - v(s)|\|_q ds. \end{aligned}$$

Per maggiorare la norma nell'integrale applichiamo la disuguaglianza di Hölder generalizzata con esponenti pq e $\frac{pq}{p-1}$ e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} &t^\alpha \|\Phi_{u_0}(u)(t) - \Phi_{v_0}(v)(t)\|_{pq} \leq \\ &\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0 - v_0\|_q + \\ &\qquad + C(p)t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|(|u(s)|^{p-1} + |v(s)|^{p-1})\|_{\frac{pq}{p-1}}\|u(s) - v(s)\|_{pq}ds \\ &\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0 - v_0\|_q + \\ &\qquad + C(p)t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(\|u(s)\|_{pq}^{p-1} + \|v(s)\|_{pq}^{p-1})\|u(s) - v(s)|\|_{pq}ds. \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che u e v sono in B_M possiamo effettuare un'ulteriore maggiorazione ottenendo

$$t^\alpha \|\Phi_{u_0}(u)(t) - \Phi_{v_0}(v)(t)\|_{pq} \leq \tag{2.8}$$
$$\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0 - v_0\|_q + C(p)M^{p-1}t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-(p-1)\alpha}\|u(s)-v(s)\|_{pq}ds.$$

In particolare, scegliendo $v_0 = 0$ e $v = 0$ e passando all'estremo superiore su $t \in (0,T)$, si ha che

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{Y_T} \leq$$
$$\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0\|_q + \sup_{0<t<T}\Big[C(p)M^{p-1}t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-p\alpha}ds\Big]\|u\|_{Y_T} \tag{2.9}$$

con il cambio di variabili $\sigma = \frac{s}{t}$, la precedente diventa

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{Y_T} \leq$$
$$\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0\|_q + \sup_{0<t<T}\Big[C(p)M^{p-1}t^{1-p\alpha}\int_0^1 (1-\sigma)^{-\alpha}\sigma^{-p\alpha}d\sigma\Big]\|u\|_{Y_T} \tag{2.10}$$
$$\leq (4\pi)^{-\alpha}\|u_0\|_q + C(p,\alpha)M^{p-1}T^{1-p\alpha}\|u\|_{Y_T}.$$

Se scegliamo $T_0 = T_0(M,N,p,q) > 0$ in modo tale che

$$C(p,\alpha)M^{p-1}T_0^{1-p\alpha} < \min\left(1-(4\pi)^{-\alpha}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad C(p)M^{p-1}T_0^{1-p\alpha} < \frac{1}{2} \tag{2.11}$$

(in cui $C(p)$ è la costante che avremo nella (2.15)). Dalla (2.10) otteniamo che per ogni $T \leq T_0$

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{Y_T} < (4\pi)^{-\alpha}M + (1-(4\pi)^{-\alpha})M = M. \tag{2.12}$$

Dunque Φ_{u_0} è un'applicazione ben definita da B_M in B_M per ogni $T \leq T_0$.

Se, invece, nella (2.8) scegliamo $v_0 = u_0$ e proseguiamo con le stesse stime svolte in (2.9) e (2.10) troviamo

$$\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_{Y_T} \leq C(p, \alpha)M^{p-1}T^{1-p\alpha}\|u - v\|_{Y_T} \leq \tfrac{1}{2}\|u - v\|_{Y_T}$$

per ogni $T \leq T_0$. L'applicazione Φ_{u_0} risulta una contrazione su B_M e, quindi, su tale insieme possiede un unico punto fisso u. Si vede facilmente che u è l'unico punto fisso per Φ_{u_0} anche su Y_T per ogni $T \leq T_0$. Infatti, prese due soluzioni u e v, entrambe apparterranno a B_{M',T'_0} per un certo M' sufficientemente grande e T'_0 sufficientemente piccolo e che soddisfi (2.11). Dunque, le soluzioni coincideranno certamente fino al tempo $t = T'_0$. Se per assurdo $u(x,t) \neq v(x,t)$ per $t \in (T'_0, T]$, allora, considerando il problema (2.4) con dato iniziale $u(T'_0)$, si ha che le due soluzioni coincidono fino ad un tempo $T' > T'_0$ ma questo contraddice la massimalità di T'_0.

Secondo passo. Verifichiamo che la soluzione trovata sia una soluzione classica per (2.4). Per quanto visto al passo precedente abbiamo che u è tale che $|u|^{p-1}u \in L^1((0,T), L^q(\Omega))$, da cui $\Phi_{u_0}(u) \in C([0,T], L^q(\Omega))$ e dunque $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$. Fissiamo $\epsilon > 0$ e poniamo $k_1 := pq$. Dalla definizione (2.6) segue che $u \in L^\infty([\epsilon, T], L^{k_1}(\Omega))$, inoltre, dalla (2.2) con $t = t + \epsilon$ e $\tau = \epsilon$, si ha:

$$u(x, t+\epsilon) = e^{t\triangle}u(x,\epsilon) + \int_0^t e^{(t-s)\triangle}|u(x, s+\epsilon)|^{p-1}u(x, s+\epsilon)ds.$$

Scegliamo $k_2 > k_1$ in modo tale che $\beta_1 := \frac{N}{2}(\frac{p}{k_1} - \frac{1}{k_2}) < 1$ e poniamo $\beta_2 := \frac{N}{2}(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2})$. Abbiamo che

$$\|u(t+\epsilon)\|_{k_2} \leq \|e^{t\triangle}u(\epsilon)\|_{k_2} + \int_0^t \|e^{(t-s)\triangle}|u(s+\epsilon)|^{p-1}u(s+\epsilon)\|_{k_2}ds.$$

A questo punto sfruttiamo di nuovo le stime per $e^{t\triangle}$, in particolare utilizziamo ancora il punto (d) della Proposizione C.3 in Appendice. Per il primo addendo applichiamo la stima con esponenti k_1 e k_2, mentre per il secondo scegliamo gli esponenti $\frac{k_1}{p}$ e k_2. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
&\|u(t+\epsilon)\|_{k_2} \leq \\
&\leq (4\pi t)^{-\beta_2}\|u(\epsilon)\|_{k_1} + \int_0^t [4\pi(t-s)]^{-\beta_1}\||u(s+\epsilon)|^{p-1}u(s+\epsilon)\|_{\frac{k_1}{p}}\, ds \\
&= (4\pi t)^{-\beta_2}\|u(\epsilon)\|_{k_1} + \int_0^t [4\pi(t-s)]^{-\beta_1}\|u(s+\epsilon)\|_{k_1}^p\, ds \leq C(\epsilon)
\end{aligned}$$

per $t \in [\epsilon, T-\epsilon]$. Dunque $u \in L^\infty([2\epsilon, T], L^{k_2}(\Omega))$; procedendo in modo analogo si ottiene $u \in L^\infty_{loc}((0,T], L^\infty(\Omega))$.

Sfruttando alcuni risultati di esistenza e regolarità, dimostriamo che u è una $L^q(\Omega)$-soluzione classica di (2.4) per $t > 0$. Analizziamo il caso in cui Ω sia un dominio limitato e regolare (lo supponiamo di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$), nel caso generale si procede in modo analogo sfruttando opportune funzioni cut-off e versioni locali dei teoremi di regolarità. Fissiamo $\delta > 0$ e consideriamo una funzione regolare $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ tale che $\psi(t) = 0$ per $t \leq \delta$ e $\psi(t) = 1$ per $t \geq 2\delta$. Per quanto visto finora u è una soluzione mild e quindi, per la Proposizione 2.2, è anche soluzione debole. La funzione ψu è soluzione debole di

$$(\psi u)_t(x,t) - \triangle(\psi u)(x,t) = f(x,t) \qquad \text{in } \Omega \times (0,T), \tag{2.13}$$

con $f(x,t) := \psi_t(t)u(x,t) + \psi(t)|u(x,t)|^{p-1}u(x,t) \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Per i risultati di regolarità (si veda il Teorema A.1 punto (iii) in Appendice) si ha che (2.13) ammette soluzione forte, cioè esiste una soluzione $v \in W^{2,1;l}(\Omega \times (0,T))$ tale che $v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = f(x,t)$ per quasi ogni $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ e ciò è verificato $\forall\, l \in (1,\infty)$. Tale v è, chiaramente, anche soluzione debole e dall'unicità per soluzioni deboli (Proposizione 2.1) abbiamo che $\psi u = v$ e quindi $u \in W^{2,1;l}(\Omega \times (2\delta, T))$ $\forall\, l \in (1,\infty)$, da cui anche $f \in W^{2,1;l}(\Omega \times (2\delta, T))$.

Ricordiamo il seguente risultato: sia $\Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, con Ω limitato e regolare (è sufficiente che soddisfi la condizione di cono interno uniforme**(2)**), e sia $l > N+2$, allora si ha l'immersione continua

(2) Dato un dominio Ω si dice che Ω soddisfa la *condizione di cono interno* se è tale che

$W^{2,1;l}(\Omega \times (0,T)) \hookrightarrow C^{a,a/2}(\overline{\Omega} \times [0,T])$, con $a < 2 - \frac{N+2}{l}$.
Dunque, se fissiamo $l > N+2$ in modo tale che $\alpha < 2 - \frac{N+2}{l}$, otteniamo che $f(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [2\delta, T])$. Se consideriamo la funzione $\psi(t-2\delta)u(x,t)$, essa verifica (2.13) in $\Omega \times (2\delta, T)$ e vale zero sulla frontiera parabolica, ossia per $(x,t) \in \Omega \times \{2\delta\}$ e per $(x,t) \in \partial\Omega \times (2\delta, T)$. Possiamo applicare il Teorema di regolarità A.2 (punto (ii)) in Appendice da cui abbiamo che ψu è soluzione classica per $t > 2\delta$ e dunque u è una soluzione classica per $t > 4\delta$.

Terzo passo. In questa parte ci occupiamo di dimostrare la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale. Omettiamo la dipendenza di u da x e denotiamo con $u(t; u_0)$ la soluzione costruita nei passi precedenti. Nel primo passo abbiamo visto che $u(t; u_0)$ appartiene a $B_{M,T}$ per ogni u_0 tale che $\|u_0\|_q < M$ e T tale che $T \leq T_0$. Dalla (2.8), con gli stessi passaggi svolti per ottenere (2.10), abbiamo che

$$\|u(\cdot\,; u_0) - u(\cdot\,; v_0)\|_{Y_T} \leq \|u_0 - v_0\|_q + C(p,\alpha) M^{p-1} T^{1-p\alpha} \|u(\cdot\,; u_0) - u(\cdot\,; v_0)\|_{Y_T}$$

e quindi, per la scelta di T_0 (2.11), si ha

$$\|u(\cdot\,; u_0) - u(\cdot\,; v_0)\|_{Y_T} \leq 2\|u_0 - v_0\|_q.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
&\|u(t; u_0) - u(t; v_0)\|_q \leq \\
&\leq \|e^{t\triangle}(u_0 - v_0)\|_q + \\
&\qquad + \int_0^t \|e^{(t-s)\triangle}(|u(s;u_0)|^{p-1}u(s;u_0) - |u(s;v_0)|^{p-1}u(s;v_0))|\|_q ds \\
&\leq \|(u_0 - v_0)\|_q + \int_0^t \||u(s;u_0)|^{p-1}u(s;u_0) - |u(s;v_0)|^{p-1}u(s;v_0)|\|_q ds,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un cono V_x di vertice x tale che $V_x \subset \overline{\Omega}$. Si dice che Ω soddisfa la *condizione di cono interno uniforme* se per ogni $x \in \partial\Omega$ soddisfa la condizione di cono interno con V_x congruente ad uno stesso cono V per ogni $x \in \partial\Omega$. Per la definizione di dominio soddisfacente la *condizione di cono esterno* e di *cono esterno uniforme* si veda la nota **(3)** a pag.80. Per tali definizioni si rimanda a D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.

che si ottiene sfruttando la proprietà di $e^{t\triangle}$ enunciata nel punto (c) della Proposizione C.3 in Appendice. Con stime analoghe a quelle svolte al primo passo per la (2.8), otteniamo in questo caso

$$
\begin{aligned}
&\|u(t;u_0) - u(t;v_0)\|_q \leq \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_q + C(p)M^{p-1}\int_0^t s^{-(p-1)\alpha}\|u(s;u_0) - u(s;u_0)\|_{pq} ds \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_q + C(p)M^{p-1}\|u(s;u_0) - u(s;u_0)\|_{Y_T}\int_0^t s^{-p\alpha} ds \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_q + C(p)M^{p-1}\|u(s;u_0) - u(s;u_0)\|_{Y_T} t^{1-p\alpha}\int_0^1 \sigma^{-p\alpha} d\sigma \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_q + C(p)M^{p-1}T_0^{1-p\alpha}\|u(\cdot\,;u_0) - u(\cdot\,;v_0)\|_{Y_T} \\
&\leq 2\|u_0 - v_0\|_q
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

per ogni $t \leq T_0$.
Dunque la mappa

$$
\begin{array}{ccc}
L^q(\Omega) & \to & L^q(\Omega) \\
u_0 & \to & u(t;u_0)
\end{array}
$$

è continua ed in particolare lipschitziana per ogni $t \leq T_0$.

Quarto passo. Dimostriamo l'unicità della soluzione. Indichiamo ancora con $u(t;u_0)$ la soluzione trovata nei passi precedenti come unico punto fisso dell'applicazione Φ_{u_0} in Y_T. Sia $v(t)$ un'altra soluzione classica, diversa da $u(t;u_0)$, di (2.4) per $t \in (0,T_1)$. Dimostriamo che $v(t) = u(t;u_0)$ per tempi piccoli. Possiamo supporre $T_1 \leq T_0$ e $\|v(t)\|_q < M$ per ogni $t \in [0,T_1)$. Poniamo $T = \frac{T_1}{2}$ e definiamo $v_\tau(\cdot\,) := v(\,\cdot + \tau)$, con $\tau \in (0,T)$. Per ogni $\tau \in (0,T)$ si ha che $v_\tau \in Y_T$ e $v_\tau = \Phi_{u_0}(v_\tau)$, ma allora

$$v(t+\tau) = u(t;v(\tau)) \qquad \forall\, t \in (0,T),$$

passando al limite per $\tau \to 0$ ed utilizzando (2.15), si ottiene $v(t) = u(t;u_0)$ per ogni $t \in (0,T)$.

Quinto passo. Dimostriamo la stima (2.5). Fissiamo $M = 2\|u_0\|_q$; omettendo la dipendenza da N, p e q si ha $T_0 = T_0(\|u_0\|_q)$. Sia $r \geq q$.
La (2.5) è immediata nei casi seguenti:

– se $r = q$, la (2.5) diventa $\|u(t)\|_q \leq C\|u_0\|_q$ e si trova direttamente dalla (2.15) ponendo $v_0 = 0$;

– se $r = pq$, la (2.5) diventa $\|u(t)\|_{pq} \leq C\|u_0\|_q t^{-\alpha}$, che discende dalla (2.12) avendo posto $M = 2\|u_0\|_q$.

Dimostriamo il risultato nel caso generale. Assumiamo che

$$\|u(t)\|_m \leq C\|u_0\|_q t^{-\alpha_m} \tag{2.16}$$

per qualche $m \geq \max(p, q)$, con α_m definito come nella (2.5). Vogliamo che la (2.16) sia valida per valori di m sempre più grandi (aumentando, se necessario, il valore di C) fino a raggiungere $m = \infty$ in un numero finito di iterazioni. Sia $r > m$, con stime analoghe a quelle svolte al primo passo, applicando diverse volte la stima per $e^{t\triangle}$ (si veda punto (d) Proposizione C.3 in Appendice) si ha

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_r \leq \|e^{\frac{t}{2}\triangle} u\left(\frac{t}{2}\right)\|_r + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \|e^{(t-s)\triangle}|u(s)|^{p-1}u(s)\|_r ds \\
&\leq \left(4\pi\frac{t}{2}\right)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})} \|u(\tfrac{t}{2})\|_m + \int_{\frac{t}{2}}^{t} (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\|u(s)\|_m^p ds \\
&\leq C\|u_0\|_q t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} + \int_{\frac{t}{2}}^{t} (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\|u(s)\|_m^p ds,
\end{aligned}$$

da cui sfruttando la (2.16) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_r \leq C\|u_0\|_q t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} + C^p\|u_0\|_q^p \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})} s^{-p\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} ds \\
&\leq C\|u_0\|_q t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} + C^p\|u_0\|_q^p\, t^{1-\frac{N}{2}(\frac{p}{q}-\frac{1}{r})} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1-\sigma)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})} \sigma^{-p\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} d\sigma \\
&\leq C\|u_0\|_q t^{-\alpha_r}\left[1 + C' t^{1-\frac{N}{2}(\frac{p-1}{q})} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-\sigma)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})} \sigma^{-p\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} d\sigma\right] \\
&\leq C\|u_0\|_q t^{-\alpha_r}
\end{aligned}$$

in cui l'ultima maggiorazione è possibile se

$$\frac{p}{m} - \frac{1}{r} < \frac{2}{N}. \tag{2.17}$$

Essendo $m \geq q$ e $q > \frac{N(p-1)}{2}$ si ha che $\frac{p}{m} - \frac{1}{m} < \frac{2}{N}$. La (2.17), dunque, risulta vera se $r = m+\eta$ con $\eta > 0$ opportuno. Vediamo quanto grande possiamo scegliere η. Dalla (2.17) ponendo $r = m + \eta$ otteniamo

$$\frac{1}{m+\eta} > \frac{p}{m} - \frac{2}{N}. \tag{2.18}$$

Distinguiamo due casi.

- Se $\frac{N(p-1)}{2} < m < \frac{Np}{2}$, la (2.18) diventa

  $$\begin{aligned} m + \eta &< \frac{mN}{pN - 2m} \\ \eta &< m\Big(\frac{N}{pN - 2m} - 1\Big). \end{aligned}$$

  Essendo $\frac{N}{pN-2m} - 1 > 0$ possiamo porre $\eta := m\Big(\frac{N}{pN-2m} - 1\Big) - \epsilon$ scegliendo $\epsilon > 0$ in modo tale che $\eta > 0$. Ripetendo il procedimento un numero finito di volte incrementiamo il valore di m fino ad avere $m \geq \frac{Np}{2}$.
- Se $m \geq \frac{Np}{2}$, la (2.18) diventa

  $$\begin{aligned} m + \eta &> \frac{mN}{pN - 2m} \\ \eta &> m\Big(\frac{N}{pN - 2m} - 1\Big), \end{aligned}$$

  in cui $\frac{N}{pN-2m} - 1 \leq 0$ e possiamo quindi scegliere $\eta > 0$ arbitrariamente grande.

Dunque, con un numero finito di iterazioni, otteniamo la (2.16) per $m = \infty$. A questo punto, applicando la disuguaglianza di interpolazione, si ha che la (2.5) vale per ogni $r \in [q, \infty]$, infatti:

$$\|u(t)\|_r \leq \|u(t)\|_q^{\frac{q}{r}} \|u(t)\|_\infty^{1-\frac{q}{r}} \leq C\|u_0\|_q (t^{-\alpha_q})^{\frac{q}{r}} (t^{-\alpha_\infty})^{1-\frac{q}{r}} = C\|u_0\|_q t^{-\alpha_r}.$$

Sesto passo. La soluzione può essere vista come limite della successione $\{u_n\}_{n\geq 1}$, costruita per ricorsione nel modo seguente:

$$u_1(t) = 0,$$
$$u_{n+1}(t) = \Phi_{u_0}(u_n(t)).$$

Pensando la soluzione in questo modo e poiché per le proprietà di $e^{t\triangle}$ (Proposizione C.3 punto (b) in Appendice) se $f \geq 0$ allora $e^{t\triangle}f \geq 0$, otteniamo che deve essere $u \geq 0$.

□

Osservazione 2.1. Supponiamo $u_0 \in L^{q_1}(\Omega) \cap L^{q_2}(\Omega)$ con $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ che garantiscano esistenza e unicità della soluzione di (2.4). Dunque, per quanto appena affermato, possiamo supporre $q_1, q_2 > \frac{N(p-1)}{2}$ o anche $q_1, q_2 \geq \frac{N(p-1)}{2}$ e $p > 1 + \frac{2}{N}$ per quanto vedremo in seguito (pag.46 caso (i)). Siano u_1, u_2 le corrispondenti soluzioni, definite rispettivamente in $[0, T_1)$ e $[0, T_2)$, allora esse coincidono in $[0, t)$, con $t = \min(T_1, T_2)$.

Dimostrazione: Possiamo supporre, eventualmente diminuendo il maggiore fra i due, $T_1 = T_2$; chiamiamo questo tempo T. La soluzione u_i è ottenuta come unico punto fisso della mappa $\Phi^i_{u_0} : Y^i_T \to Y^i_T$, in cui indichiamo con Y^i_T lo spazio definito in (2.6) con $q = q_i$, $i = 1, 2$. Per $u_0 \in L^{q_1} \cap L^{q_2}(\Omega)$, si ha che $\Phi^1_{u_0}$ coincide con $\Phi^2_{u_0}$ su $Y := Y^1_T \cap Y^2_T$ ed è una contrazione su tale Y, che è uno spazio metrico completo se vi definiamo la norma $\|\cdot\|_Y = \max(\|\cdot\|_{Y^1_T}, \|\cdot\|_{Y^2_T})$. Dunque l'applicazione avrà un unico punto fisso u in Y. Dall'unicità in ognuno degli Y^i_T, segue che $u = u_1 = u_2$.

Vediamo ora un risultato di non esistenza che mette in evidenza la minimalità dell'esponente $q = \frac{N(p-1)}{2}$.

Teorema 2.2. *Sia $p > 1 + \frac{2}{N}$ e $1 \leq q < \frac{N(p-1)}{2}$. Esiste una funzione $0 \leq u_0 \in L^q(\Omega)$ tale che (2.4) non ammette $L^q(\Omega)$-soluzione classica non negativa in $[0, T)$ per ogni $T > 0$.*

Nel seguito denoteremo con $G_\Omega : \Omega \times \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ il nucleo del calore per il problema di Dirichlet in Ω (per maggiori dettagli si veda la Sezione C.2 in Appendice). Utilizzeremo la notazione $B_r(x)$ per la palla di raggio r

e centro x contenuta in $\mathbb{R}^N$, mentre con $\delta(x)$ indicheremo la distanza di un punto x dalla frontiera di Ω.

Premettiamo due risultati che utilizzeremo nel corso della dimostrazione del Teorema 2.2 e che dimostreremo in seguito.

Proposizione 2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio arbitrario. Esistono $c_1 > 0$ e $c_2 \geq 2$ dipendenti unicamente da N, tali che*

$$G_\Omega(x, y, t) \geq c_1 t^{-\frac{N}{2}}, \tag{2.19}$$

$\forall\, t > 0$ e $\forall\, x, y \in \Omega$ tali che $\delta(x) \geq c_2\sqrt{t}$ e $|x - y| \leq \sqrt{t}$.

Lemma 2.1. *Sia $u_0 : \Omega \to [0, \infty]$ e $u : \Omega \times [0, T] \to [0, \infty]$ misurabile e tale che*

$$u(x, t) \geq e^{t\triangle} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\triangle} u^p(x, s) ds \qquad q.o.\ in\ \Omega \times (0, T). \tag{2.20}$$

Supponiamo $u(x, t) < \infty$ per quasi ogni $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Allora si ha che

$$t^{\frac{1}{p-1}} \| e^{t\triangle} u_0 \|_\infty \leq k_p := (p - 1)^{-\frac{1}{p-1}} \qquad \forall t \in (0, T]. \tag{2.21}$$

Dimostrazione (Teorema 2.2). Fissiamo $\alpha \in (0, \frac{N}{q})$. Possiamo, senza perdita di generalità, supporre $B_{2\rho}(0) \subset \Omega$, con $\rho > 0$. Consideriamo il problema (2.4) con dato iniziale $u_0 \in L^q(\Omega)$ definito nel modo seguente:

$$u_0(x) = |x|^{-\alpha} \chi_{B_\rho(0)}(x), \qquad x \in \Omega.$$

Per $t > 0$ sufficientemente piccolo, dalla Proposizione 2.3, otteniamo

$$\begin{aligned}(e^{t\triangle} u_0)(0) &= \int_{|y|<\rho} G_\Omega(0, y, t) |y|^{-\alpha} dy \\ &\geq c_1 t^{-\frac{N}{2}} \int_{\{\frac{\sqrt{t}}{2} < |y| < \sqrt{t}\}} |y|^{-\alpha} dy \geq c t^{-\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Prendendo α sufficientemente vicino a $\frac{N}{q}$ si ha $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p-1}$, essendo $q < \frac{N(p-1)}{2}$, e dunque per $t < 1$ si ha $t^{-\frac{\alpha}{2}} > t^{-\frac{1}{p-1}}$. Se confrontiamo la (2.22) con quanto affermato nel Lemma 2.1 si deduce che il problema (2.4) non può ammettere soluzione non negativa in $[0, T)$ per ogni $T > 0$. $\square$

Dimostrazione (Proposizione 2.3). Fissiamo $y \in \Omega$. Sia $\rho := \delta(y)$ e $u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$, con $x \in B_\rho(y)$, $t > 0$. Se $x \in \partial B_\rho(y)$, si ha $u(x,t) = \rho^{-N} g(t\rho^{-2})$, in cui $g(s) = (4\pi s)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{4s}}$.
Definiamo $a(N) := \sup_{s>0} g(s)$ $(a(N) < \infty)$ e

$$\underline{u}(x,t) = u(x,t) - M, \qquad M := a(N)\rho^{-N};$$

La funzione $\underline{u}$ soddisfa il seguente problema:

$$\begin{cases} \underline{u}_t(x,t) - \triangle \underline{u}(x,t) = 0 & \text{in } B_\rho(y) \times (0,\infty), \\ \underline{u}(x,t) \le 0 & x \in \partial B_\rho(y), t > 0. \end{cases}$$

Per il principio di massimo (Proposizione B.1 in Appendice), si ha che $\underline{u}(x,t) \le 0$ e dunque $G_\Omega(x,y,t) \ge \underline{u}(x,t)$ in $B_\rho(y) \times (0,\infty)$. In particolare, se $\delta(x) \ge c_2\sqrt{t}$ e $|x-y| \le \sqrt{t}$, abbiamo che $\rho = \delta(y) \ge (c_2 - 1)\sqrt{t}$ e possiamo minorare $\underline{u}$, e di conseguenza anche G_Ω, nel modo seguente

$$G_\Omega(x,y,t) \ge \underline{u}(x,t) \ge ((4\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{4}} - a(N)(c_2-1)^{-N})t^{-\frac{N}{2}} \ge c_1(N) t^{-\frac{N}{2}},$$

a patto di scegliere $c_2 = c_2(N) > 1$ sufficientemente grande.

$\square$

Dimostrazione (Lemma 2.1). Riportiamo inizialmente i seguenti risultati:

- dalla proprietà di semigruppo di $e^{t\triangle}$ segue che

$$e^{t\triangle} f = e^{(t-s)\triangle} e^{s\triangle} f \qquad \forall \quad 0 < s < t, \tag{2.23}$$

per ogni $f : \Omega \to [0, \infty]$ misurabile;

- poiché $\int_\Omega G_\Omega(x, y, t)dy \leq 1$, applicando la disuguaglianza di Jensen si ha che

$$e^{t\triangle} f^p \geq (e^{t\triangle} f)^p, \tag{2.24}$$

per ogni $f : \Omega \to [0, \infty]$ misurabile.

Possiamo assumere, a meno di ridefinire u su un insieme di misura nulla, che la (2.20) sia soddisfatta per ogni $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Per ipotesi abbiamo che per quasi ogni $\tau \in (0, T)$ $u(x, \tau) < \infty$ quasi ovunque in Ω. Fissiamo un tale $\tau \in (0, T)$ e definiamo $\Omega_\tau := \{x \in \Omega : u(x, \tau) < \infty\}$. Sia $t \in [0, \tau]$, applicando l'operatore $e^{(\tau-t)\triangle}$ nella (2.20), sfruttando la (2.23) ed il Teorema di Tonelli per il passaggio di $e^{(\tau-t)\triangle}$ sotto il segno di integrale, si ha

$$\begin{aligned} e^{(\tau-t)\triangle} u(x, t) &\geq e^{\tau\triangle} u_0(x) + \int_0^t e^{(\tau-s)\triangle} u^p(x, s) ds \\ &\geq e^{\tau\triangle} u_0(x) + \int_0^t (e^{(\tau-s)\triangle} u(x, s))^p ds =: h(x, t) \end{aligned} \tag{2.25}$$

in cui abbiamo sfruttato la (2.24) per la seconda minorazione.
Dunque, dalla stima precedente abbiamo che

$$\begin{aligned} h(x, t) &\leq e^{\tau\triangle} u_0(x) + \int_0^t e^{(\tau-s)\triangle} u^p(x, s) ds \\ &\leq e^{\tau\triangle} u_0(x) + \int_0^\tau e^{(\tau-s)\triangle} u^p(x, s) ds \leq u(x, \tau) \end{aligned}$$

in cui l'ultima maggiorazione si ha per (2.20). Dunque $h(x, t) < \infty$ per ogni $(x, t) \in \Omega_\tau \times [0, \tau]$.
Fissiamo $x \in \Omega_\tau$. La funzione $\Phi(t) := h(x, t)$ è assolutamente continua in $[0, \tau]$ e poiché dalla (2.25) si ha $e^{(\tau-t)\triangle} u(x, t) \geq h(x, t)$, segue che

$$\Phi'(t) = (e^{(\tau-t)\triangle} u(x, t))^p \geq \Phi^p(t) \text{ per quasi ogni } t \in [0, \tau], \tag{2.26}$$

essendo $\Phi(t) \geq e^{\tau\triangle} u_0(x) > 0$. La (2.26) può così essere riscritta nel modo seguente

$$[\Phi^{1-p}]' \leq -(p-1). \tag{2.27}$$

Integrando la (2.27) su $[0, \tau]$ si ottiene

$$[(e^{\tau\triangle}u_0)(x)]^{1-p} = \Phi^{1-p}(0) \geq \Phi^{1-p}(\tau) + (p-1)\tau \geq (p-1)\tau,$$

da cui segue che

$$\tau^{\frac{1}{p-1}} \|e^{\tau\triangle}u_0\|_\infty \leq k_p, \tag{2.28}$$

in cui $k_p := (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$. Quindi abbiamo che $e^{t\triangle}u_0 \in L^\infty(\Omega)$ per quasi ogni $t \in (0, T)$. Poiché la funzione $t \to \|e^{t\triangle}v\|_\infty$ è continua per $v \in L^\infty(\Omega)$ e $t > 0$, allora, utilizzando ancora la (2.23), si ottiene che la funzione

$$t \to t^{\frac{1}{p-1}} \|e^{t\triangle}u_0\|_\infty \text{ è continua in } (0, T]. \tag{2.29}$$

Infatti, fissato $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo e tale che $e^{\epsilon\triangle}u_0 \in L^\infty(\Omega)$ abbiamo che l'applicazione $t \to \|e^{(t-\epsilon)\triangle}(e^{\epsilon\triangle}u_0)\|_\infty$ è continua in $(\epsilon, T+\epsilon)$ e dunque si ha (2.29). Ciò permette di concludere che la (2.21) vale per ogni $t \in (0, T]$. □

Presentiamo alcuni risultati che si hanno in corrispondenza del valore critico $q = \frac{N(p-1)}{2}$.

(i) Se $u_0 \in L^q(\Omega)$, con $q = \frac{N(p-1)}{2}$ e $p > \frac{N}{2} + 1$, con tecniche analoghe a quelle utilizzate nella dimostrazione del Teorema 2.1 si dimostra (si veda [3] Teorema 1) che esiste un tempo $T = T(u_0) > 0$ tale che il problema (2.4) possiede un'unica soluzione classica in $[0, T)$ che soddisfa la stima (2.5) ed è non negativa se $u_0 \geq 0$. Riportiamo un esempio che mette in evidenza come in questo caso il tempo T dipenda da u_0 e non solo da $\|u_0\|_q$.

Esempio 2.1. Assumiamo $B_1(0) \subset \Omega$, e sia $0 \leq u_0 \in L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Supponiamo esista un tempo $T_{max}(u_0) < \infty$ tale che la soluzione del

problema (2.4) con dato iniziale u_0 sia definita in $[0, T_{max}(u_0))$ ma non possa essere prolungata con continuità per tempi successivi ad esso (nella Sezione 3.1 sarà definito più nel dettaglio il tempo massimale di esistenza di una soluzione). Sia $B_j := B_{\frac{1}{j}}(0)$, con $j \geq 1$.
Definiamo

$$u_{0,j}(x) := \begin{cases} j^{\frac{2}{p-1}} u_0(jx), & x \in B_j; \\ 0, & x \in \Omega \setminus B_j. \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\widetilde{u}_j(x,t) := j^{\frac{2}{p-1}} u(jx, j^2 t)$ risolve (2.4) in $B_j \times (0, j^{-2} T_{max}(u_0))$ con dato iniziale $u_{0,j|B_j}$. Sia u_j la soluzione del problema (2.4) in Ω con dato iniziale $u_{0,j}$. Poiché $u_j \geq 0$ su ∂B_j, per confronto (Proposizione B.2 in Appendice) si ha che $u_j \geq \widetilde{u}_j$ in B_j, fino a che u_j esiste. Dunque $T_{max}(u_{0,j}) \leq j^{-2} T_{max}(u_0) \to 0$ per $j \to \infty$, mentre $\|u_{0,j}\|_q = \|u_0\|_q$.

(ii) Se $q = \frac{N(p-1)}{2} = 1$, cioè siamo nel caso $q = 1$ e $p = 1 + \frac{2}{N}$, si dimostra (si veda [3] Teorema 11) che esiste un dato iniziale $0 \leq u_0 \in L^1(\Omega)$ tale che il problema (2.4) non possiede alcuna soluzione classica non negativa in $[0, T)$ per ogni $T > 0$. In questo caso, quindi, si ha un risultato analogo a quello del Teorema 2.2.

Osservazione 2.2. Possiamo chiederci quali siano le ipotesi sui dati iniziali più generali che ci assicurino esistenza locale della soluzione del problema (2.4). Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, si ha che per ogni u soluzione classica non negativa dell'equazione

$$u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = u^p(x,t), \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{2.30}$$

con $p > 1$, esiste un'unica misura di Radon μ non negativa tale che

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) d\mu, \tag{2.31}$$

per ogni $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua e a supporto compatto. La misura μ è chiamata *traccia iniziale* di u. Se, inoltre, $p < 1 + \frac{2}{N}$ allora μ è uniformemente localmente finita, cioè:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} d\mu < \infty. \tag{2.32}$$

La condizione (2.32) è anche sufficiente affinché esista una soluzione classica con " dato iniziale μ". Infatti, se μ è una misura di Radon non negativa che verifica (2.32), allora esiste una soluzione classica non negativa di (2.30) che soddisfa (2.31).

Capitolo 3

Esplosione in tempo finito

3.1 Tempo di esistenza massimale di soluzioni

In questa sezione presenteremo il concetto di tempo di esistenza massimale di una soluzione per un problema del tipo (2.1) e presenteremo alcune condizioni sufficienti affinché sia garantito che il tempo di esistenza massimale sia infinito. Supporremo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare di classe $C^{2+\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$.

Iniziamo con la seguente proposizione in cui si fornisce la definizione di *soluzione massimale* e di *tempo di esistenza massimale.*

Proposizione 3.1. *Sia X uno spazio di Banach di funzioni definite in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Supponiamo che il problema (2.1) possieda, per ogni $u_0 \in X$, un'unica X-soluzione classica nell'intervallo $[0,T]$, con $T = T(u_0)$. Allora esiste un tempo $T_{max} = T_{max}(u_0) \in (T,\infty]$ con le seguenti proprietà:*

1. *la soluzione, che chiamiamo u, può essere prolungata in modo unico ad una X-soluzione classica nell'intervallo $[0,T_{max})$;*

2. *se $T_{max} < \infty$, allora u non può essere prolungata ad una X-soluzione classica in $[0,\tau)$ per ogni $\tau > T_{max}$. La funzione u è detta* soluzione massimale *del problema (2.1) e T_{max} il suo* tempo di esistenza massimale;

3. se, inoltre, T dipende solo da $\|u_0\|_X$, cioè $T = T(\|u_0\|_X)$, allora si ha che

$$o\ T_{max} = \infty \ oppure \ \lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo $u_0 \in X$. Per l'ipotesi di unicità della soluzione sappiamo che se u_1 ed u_2 sono due soluzioni del problema (2.1) su $[0, T_1)$ e $[0, T_2)$ rispettivamente, allora deve essere $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in [0, \min(T_1, T_2))$. Sia $\{u_\alpha : [0, T_\alpha) \to X\}$ l'insieme di tutte le soluzioni di (2.1) e $\widetilde{T} := \sup T_\alpha$. Definiamo allora una funzione $u : [0, \widetilde{T}) \to X$ nel modo seguente:

$$u(t) := u_\alpha(t) \text{ con } \alpha \text{ tale che } T_\alpha > t, \quad \forall\, t \in [0, \widetilde{T}).$$

La funzione u è chiaramente soluzione di (2.1) in $[0, \widetilde{T})$. Ponendo $T_{max} = \widetilde{T}$ si ha che u e $\widetilde{T}$ verificano le proprietà 1 e 2.
Dimostriamo 3. Supponiamo per assurdo che

$$\widetilde{T} < \infty \qquad \text{e} \qquad \liminf_{t \to \widetilde{T}} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Possiamo scegliere una costante $C > 0$ e una successione $\{t_k\}$ tale che $t_k \xrightarrow{k \to \infty} \widetilde{T}$ e $\|u(t_k)\|_X < C$ per ogni $k = 1, 2, \dots$. Consideriamo a questo punto il problema (2.1) con dato iniziale $u(t_k)$; per l'ipotesi di esistenza, sappiamo che deve esistere un tempo $T > 0$, indipendente da t_k, ed una funzione, che denotiamo con u_k, che sia soluzione del problema (2.1) con dato iniziale $u(t_k)$ nell'intervallo $[0, T]$.
Dall'unicità si ha che $u_k(t) = u(t + t_k)$ per tempi piccoli. Fissiamo k in modo tale che $t_k \in (\widetilde{T} - T, \widetilde{T})$ e poniamo

$$\widetilde{u}(t) := \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_k], \\ u_k(t - t_k), & t \in (t_k, t_k + T]. \end{cases}$$

Allora $\widetilde{u}$ è soluzione in $[0, t_k + T]$ del problema (2.1) con dato iniziale u_0 e, poiché $t_k + T > \widetilde{T}$, si ha una contraddizione con la definizione di $\widetilde{T}$. $\square$

Consideriamo il problema (2.4). Per quanto affermato nel Teorema 2.1 abbiamo che, se $X = L^q(\Omega)$ con $q \geq 1$ e $\frac{N(p-1)}{2} < q < \infty$, possiamo applicare la Proposizione 3.1 la quale ci assicura la presenza di una soluzione massimale e di un suo tempo di esistenza massimale.

Se $u_0 \in L^q(\Omega)$ con $q \geq 1$ e $\frac{N(p-1)}{2} < q < \infty$ dal Teorema 2.1 possiamo, inoltre, ottenere una stima inferiore per la norma della soluzione in $L^q(\Omega)$, nel caso $T_{max}(u_0) < \infty$. In particolare dalla (2.11), si deduce che T_{max} deve soddisfare la seguente disequazione:

$$(T_{max}(u_0))^{1-\frac{N(p-1)}{2q}} \|u_0\|_q^{p-1} \geq C(N,p,q) > 0,$$

da cui, con una traslazione del tempo, si ha

$$\|u(t)\|_q \geq C(N,p,q)(T_{max}(u_0) - t)^{\frac{N}{2q} - \frac{1}{p-1}}, \qquad 0 \leq t < T.$$

Quando $u_0 \in L^q(\Omega)$ con $q = \frac{N(p-1)}{2}$ sappiamo, per quanto spiegato a pag.46 caso (i), che si ha ancora esistenza ed unicità della soluzione. In generale non è vero che, data una soluzione u del problema (2.4) definita in un intervallo $[0, T]$, si ha dipendenza del tempo T dalla sola norma di u_0. Dunque, nel caso critico, non è possibile applicare il punto 3 della precedente proposizione. In generale, infatti, non sappiamo se $T_{max}(u_0) < \infty$ comporti che

$$\lim_{t \to T_{max}(u_0)} \|u(t)\|_q = \infty.$$

Un risultato in questo senso è dato dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.2. *Consideriamo il problema (2.4) con $p = 1+\frac{4}{N}$ (l'esponente critico dunque è $q = 2$). Sia $u_0 \in L^2(\Omega)$ e supponiamo che $T_{max}(u_0) < \infty$. Allora*

$$\|u(t)\|_2 \geq C(N,p)|\log(T_{max} - t)|^{\frac{1}{2}}.$$

Diremo che un problema del tipo (2.1) possiede una *soluzione globale* se $T_{max} = \infty$.

La Proposizione 3.1 fornisce un semplice criterio per l'esistenza globale: sia X uno spazio di Banach verificante le ipotesi della proposizione, se $\|u(t)\|_X$ è limitata da una costante indipendente da t, allora deve essere $T_{max} = \infty$.

Osservazione 3.1. Siano q_1, q_2 diversi fra loro e tali che $1 \leq q_1, q_2 < \infty$ e $q_1, q_2 \geq \frac{N(p-1)}{2}$. Supponiamo che $u_0 \in L^{q_1}(\Omega) \cap L^{q_2}(\Omega)$, denotiamo con u_i, $i = 1, 2$, le corrispondenti $L^{q_i}(\Omega)$-soluzioni classiche massimali e con T_i i loro tempi di esistenza massimale. Vogliamo dimostrare che il tempo massimale non dipende dall'esponente q dello spazio di Lebesgue di appartenenza del dato iniziale, cioè vogliamo provare che $T_1 = T_2$.
Supponiamo per assurdo che $T_1 \neq T_2$ e, per esempio, $T_1 < T_2$, da cui segue che $T_1 < \infty$. Per l'Osservazione 2.1, abbiamo che $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ per $(x,t) \in \Omega \times [0, T_1)$. Dalla definizione di soluzione classica (Definizione 2.1) sappiamo che $u_2 \in L^\infty_{loc}((0, T_2), L^\infty(\Omega))$, dunque, ponendo $u_1(x, T_1) := u_2(x, T_1)$ per $x \in \Omega$, abbiamo che $u_1 \in L^\infty_{loc}((0, T_1], L^\infty(\Omega))$ da cui otteniamo

$$||u_1(x,t)|^{p-1} u_1(x,t)| \leq C|u_1(x,t)| \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } t \in \big[T_1/2, T_1\big]. \tag{3.1}$$

La (3.1) ci permette di stimare, nell'intervallo $\big[T_1/2, T_1\big]$, $|u_1|$ confrontando la funzione u_1 con la soluzione del problema lineare

$$u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = Cu(x,t) \tag{3.2}$$

che è una $L^{q_1}(\Omega)$-soluzione classica (si veda l'Osservazione C.4 in Appendice per maggiori dettagli riguardo la soluzione di (3.2)). Da ciò si deduce facilmente che

$$\sup_{t \in [T_1/2, T_1]} \|u_1(t)\|_{q_1} < \infty. \tag{3.3}$$

Se $q_1 > \frac{N(p-1)}{2}$, dal punto 3 della Proposizione 3.1, abbiamo che, poiché $T_1 < \infty$, deve essere $\lim_{t \to T_1} \|u(t)\|_{q_1} = \infty$, ma ciò è in contraddizione con (3.3).
Se $q_1 = \frac{N(p-1)}{2}$ abbiamo comunque un assurdo, in quanto dalla (3.3) si può dedurre direttamente che u_1 è una $L^{q_1}(\Omega)$-soluzione classica in $[0, T_1]$, in

contraddizione con l'ipotesi di massimalità di T_1.

Osservazione 3.2. Si può dimostrare[(1)] che nel caso $L^\infty(\Omega)$ il problema (2.1) è ben posto, cioè, per ogni $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, esiste un tempo $T > 0$ ed un'unica $L^\infty(\Omega)$-soluzione classica in $[0, T]$.
Inoltre si dimostra anche che, se $f \in C^1(\mathbb{R})$, siamo nelle ipotesi per poter applicare la Proposizione 3.1. Dunque, anche in questo caso, la uniforme limitatezza della soluzione in $L^\infty(\Omega)$ rispetto al tempo, è sufficiente per la sua esistenza globale.

Presentiamo un teorema che mostra come la limitatezza di u, soluzione di (2.4), in $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N(p-1)}{2}$ comporti la sua limitatezza in $L^\infty(\Omega)$.
Per semplicità supponiamo Ω limitato e $N \geq 3$. Quanto affermeremo può essere ottenuto come conseguenza della Proposizione 3.1 e del fatto che il problema (2.4) è ben posto in $L^q(\Omega)$ con $q \in \left(\frac{N(p-1)}{2}, \infty\right]$; tuttavia vedremo un'altra dimostrazione, quella presentata da N.D. Alikakos in [1], in cui non si sfruttano risultati di buona positura.

Teorema 3.1. *Sia $p > 1$ e u una soluzione classica di (2.4) in $[0, T)$. Supponiamo che $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e che, dato $q > 1$, $U_q := \sup_{t<T} \|u(t)\|_q < \infty$. Se $p < 1 + \frac{2q}{N}$, allora $U_\infty < \infty$.*

Il seguente lemma ci servirà per la dimostrazione del teorema.

Lemma 3.1. *Sia u una soluzione classica di (2.4) definita in $[0, T)$, $r \geq q \geq 1$, $p < 1 + \frac{2q}{N}$. Definiamo:*

$$\widetilde{U}_r := \max\{1, \|u_0\|_\infty, \sup_{t<T} \|u(t)\|_r\},$$

$$\sigma(r) := \frac{N+2}{2N}\left(\frac{2r}{N} + 1 - p\right)^{-1} \qquad e \qquad \rho(r) := 1 + (p-1)\sigma(r)$$

(1) Si veda H. Brezis e T. Cazenave, *Non Linear Evolution Equations*, Lecture Notes at Instituto de Matematica, Rio de Janeiro, 1994.

e supponiamo $\widetilde{U}_r < \infty$.
Allora esiste una costante $C = C(p,q,N,\Omega) > 0$ *tale che*

$$\widetilde{U}_{2r} \leq C^{\frac{1}{r}} r^{\sigma(r)} \widetilde{U}_r^{\rho(r)}. \tag{3.4}$$

Dimostrazione (Lemma 3.1). Dalla prima equazione di (2.4) otteniamo, moltiplicando per $|u|^{2r-2}u$ ed integrando in Ω:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2r}\int_\Omega |u(x,t)|^{2r}dx + \frac{2r-1}{r^2}\int_\Omega \left|\nabla |u(x,t)|^r\right|^2 dx = \int_\Omega |u(x,t)|^{p+2r-1}dx. \tag{3.5}$$

Sia $w(x,t) := |u(x,t)|^r$, $\alpha := \frac{p+2r-1}{2r}$, β tale che $\frac{1}{2\alpha} = \beta + \frac{1-\beta}{2^*}$[(2)] e $\delta := 1-\alpha(1-\beta)$. Dalle ipotesi segue che $1 < p < 1 + \frac{2r}{N}$ da cui si ha che $\beta \in (0,1)$ e $\alpha(1-\beta) < 1$. Scriviamo la (3.5) in funzione di w ed operiamo una serie di stime che giustificheremo di seguito:

$$\frac{d}{dt}\tfrac{1}{2r}\|w(t)\|_2^2 + \tfrac{2r-1}{r^2}\|\nabla w(t)\|_2^2 = \|w(t)\|_{2\alpha}^{2\alpha} \leq \tag{3.6}$$

$$\leq \left(\|w(t)\|_1^\beta \|w(t)\|_{2^*}^{1-\beta}\right)^{2\alpha} \leq \tag{3.7}$$

$$\leq C\left(\|w(t)\|_1^\beta \|\nabla w(t)\|_2^{1-\beta}\right)^{2\alpha} = \tag{3.8}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2r}\|\nabla w(t)\|_2^2\right)^{\alpha(1-\beta)} \left(C r^{1-\beta}\|w(t)\|_1^{2\beta}\right)^\alpha \leq \tag{3.9}$$

$$\leq \tfrac{1}{2r}\|\nabla w(t)\|_2^2 + C r^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\delta}} \|w(t)\|_1^{\frac{2\alpha\beta}{\delta}} = \tag{3.10}$$

$$= \tfrac{1}{2r}\|\nabla w(t)\|_2^2 + C r^{2r\sigma(r)-1}\|w(t)\|_1^{2\rho(r)}, \tag{3.11}$$

in cui $C > 0$ costante. Esplicitiamo i passaggi svolti: la (3.7) si ottiene dalla (3.6) applicando la disuguaglianza di interpolazione; la (3.8) dalla (3.7) applicando la disuguaglianza di Sobolev; nella (3.9) abbiamo moltiplicato e diviso per $r^{\alpha(1-\beta)}$; per avere la (3.10) bisogna applicare la disuguaglianza di Young con esponenti $\frac{1}{\alpha(1-\beta)}$ e $\frac{1}{\delta}$ ed infine la (3.11) è semplicemente una riscrittura della (3.10) in funzione di $\rho(r)$ e $\sigma(r)$. Confrontando la (3.6) e la

[(2)] Dato $p \geq 1$, si utilizza la seguente notazione: $p^* := \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

(3.11), si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2r}\|w(t)\|_2^2+\frac{2r-1}{r^2}\|\nabla w(t)\|_2^2\leq\frac{1}{2r}\|\nabla w(t)\|_2^2+Cr^{2r\sigma(r)-1}\|w(t)\|_1^{2\rho(r)},$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Poincaré, otteniamo

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2+c\|w(t)\|_2^2\leq Cr^{2r\sigma(r)-1}\|w(t)\|_1^{2\rho(r)}, \tag{3.12}$$

con $c>0$ costante. Sfruttando la (3.12), abbiamo che

$$\begin{aligned} e^{-ct}\frac{d}{dt}\big(e^{ct}\|w(t)\|_2^2\big) =&\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2+c\|w(t)\|_2^2 \\ \leq& Cr^{2r\sigma(r)}\|w(t)\|_1^{2\rho(r)}\leq Cr^{2r\sigma(r)}\widetilde{U}_r^{2r\rho(r)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Poiché $\|w(0)\|_2^2\leq C\|u_0\|_\infty^{2r}\leq C\widetilde{U}_r^{2r}$ e $\|w(t)\|_2^2=\|u(t)\|_{2r}^{2r}$, integrando la (3.13) si ottiene:

$$\sup_{t<T}\|u(t)\|_{2r}\leq C^{\frac{1}{r}}r^{\sigma(r)}\widetilde{U}_r^{\rho(r)}. \tag{3.14}$$

Con la (3.14) abbiamo in sostanza la tesi. Infatti, nel caso in cui $\widetilde{U}_{2r}=1$ oppure $\widetilde{U}_{2r}=\|u_0\|_\infty$, la tesi segue in modo immediato.

□

Dimostrazione (Teorema 3.1). Nella dimostrazione utilizzeremo le stesse notazioni introdotte nel lemma precedente. Inoltre, sia $\gamma:=q\sigma(q)$. Da un semplice calcolo diretto si ottiene che

$$\gamma\geq r\sigma(r),\qquad \text{per ogni } r\geq q. \tag{3.15}$$

Applicando il Lemma 3.1 con $r=q$, $r=2q$, $r=4q$, $\dots$, si ottiene che, per ogni $\nu\in\mathbb{N}$, vale la seguente disequazione:

$$\widetilde{U}_{2^{\nu+1}q}\leq(Cq^\gamma)^{k_1}2^{k_2}\widetilde{U}_q^{k_3}, \tag{3.16}$$

in cui

$$
\begin{aligned}
k_1 = &\quad \frac{1}{2^\nu q} + \frac{\rho(2^\nu q)}{2^{\nu-1}q} + \frac{\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)}{2^{\nu-2}q} + \dots \\
&\dots + \frac{\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)\dots\rho(2^3 q)\rho(2^2 q)}{2q} + \frac{\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)\dots\rho(2^2 q)\rho(2q)}{q}, \\
k_2 = &\quad \frac{\gamma}{q}\bigg(\frac{\nu}{2^\nu} + \frac{\nu-1}{2^{\nu-1}}\,\rho(2^\nu q) + \frac{\nu-2}{2^{\nu-2}}\,\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q) + \dots \\
&\dots + \frac{2}{2^2}\,\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)\dots\rho(2^4 q)\rho(2^3 q) + \frac{1}{2}\,\rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)\dots\rho(2^3 q)\rho(2^2 q)\bigg), \\
k_3 = &\quad \rho(2^\nu q)\rho(2^{\nu-1}q)\dots\rho(2q)\rho(q).
\end{aligned}
$$

Precisiamo che per la (3.16) è stata sfruttata la maggiorazione

$$\sigma(2^\nu q) \leq \frac{\sigma(q)}{2^\nu}, \qquad \text{per ogni } \nu \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

che si ottiene dalla (3.15) ponendo $r = 2^\nu q$. Vogliamo verificare ora che il valore di k_i, $i = 1, 2, 3$, è limitato da una costante indipendente da ν, cosicché passando al limite per ν che tende a infinito in (3.16), avremo la tesi.
Si ha

$$
\begin{aligned}
\log k_3 = \sum_{i=0}^{\nu} \log \rho(2^i q) &\leq \sum_{i=0}^{\nu} \log(1 + (p-1)\sigma(q)2^{-i}) \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{\nu} (p-1)\sigma(q)2^{-i} \leq 2(p-1)\sigma(q) =: \widetilde{C} < \infty,
\end{aligned}
$$

in cui $\widetilde{C}$ non dipende da ν. Nella disuguaglianza precedente abbiamo sfruttato che dalla (3.17) segue $\rho(2^i q) \leq 1 + (p-1)\sigma(q)2^{-i}$ ed il fatto che, come noto, $\log(1+x) \leq x$ per ogni $x \geq 0$.
Inoltre,

$$k_1 \leq \frac{k_3}{q} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{q} e^{\widetilde{C}} < \infty,$$

$$k_2 \leq \frac{\gamma}{q} k_3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{i}{2^i} \leq \frac{\gamma}{q} e^{\widetilde{C}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} < \infty,$$

dunque, si ha la tesi. □

Osservazione 3.3. Notiamo che il valore $q = \frac{N(p-1)}{2}$ risulta critico non solo per la buona positura del problema (2.4), ma anche per quanto riguarda l'esistenza globale della soluzione. Nel corso di questa sezione abbiamo evidenziato come per $q > \frac{N(p-1)}{2}$ esista un criterio (Proposizione 3.1) per l'esistenza globale; per q sottocritico si può dimostrare, invece, che il criterio non è più valido.
A. Friedman e B. McLeod in *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, pubblicato sull'Indiana University Mathematics Journal nel 1985 (Vol.34 pag.425-447), dimostrano che, per $1 < q < \frac{N(p-1)}{2}$ e $\Omega = B_R(0)$ (con $R > 0$), esiste una soluzione u di (2.4) radiale positiva tale che $T_{max} < \infty$ ma tale che

$$\sup_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_q < \infty.$$

3.2 Condizioni sufficienti per l'esplosione in tempo finito

In questa sezione analizzeremo, sotto ipotesi di buona positura del problema (2.4), alcune condizioni sufficienti affinché il tempo di esistenza massimale della soluzione sia finito. Quando ciò si verifica diremo che c'è esplosione o, con termine inglese, *blow-up* della soluzione ad un tempo finito.

Supporremo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare di classe $C^{2+\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$.

Il primo teorema che presentiamo, valido nel caso di domini limitati, si basa sul metodo utilizzato da S. Kaplan in [8] (Sezione 6).
Denotiamo con $\lambda_\Omega^{(1)}$ e $\varphi_\Omega^{(1)}$ rispettivamente il primo autovalore e la prima autofunzione dell'operatore $-\triangle$ per il problema di Dirichlet in Ω. Supponiamo $\int_\Omega \varphi_\Omega^{(1)}(x)dx = 1$.

Teorema 3.2. *Consideriamo il problema* (2.4) *e supponiamo* Ω *limitato. Sia* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *tale che* $u_0 \geq 0$ *e*

$$\int_\Omega u_0(x)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx > a := (\lambda_\Omega^{(1)})^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.18}$$

Allora $T_{max}(u_0) < \infty$.

Dimostrazione. Ricordiamo che dall'ipotesi $u_0 \geq 0$ segue $u \geq 0$, come provato nel Teorema 2.1. Inoltre $\varphi_\Omega^{(1)}$ per definizione soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} -\triangle\varphi_\Omega^{(1)}(x) = \lambda_\Omega^{(1)}\varphi_\Omega^{(1)}(x) & \text{in } \Omega, \\ \varphi_\Omega^{(1)}(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Consideriamo la prima equazione in (2.4), moltiplicando per $\varphi_\Omega^{(1)}$ ed integrando su Ω otteniamo:

$$\int_\Omega u_t(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx - \int_\Omega \triangle u(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx = \int_\Omega u^p(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx.$$

Applicando la formula di Green e ricordando che fissato $t > 0$ $u(x,t) = \varphi_\Omega^{(1)}(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, si ha

$$\int_\Omega u_t(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx - \int_\Omega \triangle\varphi_\Omega^{(1)}(x)u(x,t)dx = \int_\Omega u^p(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx, \quad (3.20)$$

da cui, sfruttando la (3.19) si ottiene

$$\int_\Omega u_t(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx = -\int_\Omega \lambda_\Omega^{(1)}\varphi_\Omega^{(1)}(x)u(x,t)dx + \int_\Omega u^p(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx.$$

Per la definizione di a (si veda (3.18)) e la disuguaglianza di Jensen (si veda (11)) otteniamo

$$\int_\Omega u_t(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx \geq -a^{p-1}\int_\Omega \varphi_\Omega^{(1)}(x)u(x,t)dx + \big(\int_\Omega u(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx\big)^p. \quad (3.21)$$

Introduciamo ora una nuova funzione $y : [0, T_{max}(u_0)) \to \mathbb{R}$, definita nel modo seguente:

$$y(t) := \int_\Omega u(x,t)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx.$$

La (3.21) allora diventa:

$$y'(t) \geq y^p(t) - a^{p-1}y(t), \quad (3.22)$$

poiché $y(0) > a$, dalla precedente disuguaglianza segue $y'(0) > 0$. Dunque la funzione $y(t)$ è crescente in zero e quindi si avrà $y(\delta) > a$ per $\delta > 0$ sufficientemente vicino a zero, da ciò segue che $y'(\delta) > 0$ e quindi la funzione è ancora crescente in δ. Proseguendo in questo modo si dimostra che $y(t)$ è crescente per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$. Dalla (3.22) abbiamo che

$$\begin{aligned} y'(t) &\geq y^p(t) - a^{p-1}y(t) = \left(1 - \frac{a^{p-1}}{y^{p-1}(t)}\right)y^p(t) \\ &\geq \left(1 - \frac{a^{p-1}}{y^{p-1}(0)}\right)y^p(t) = \epsilon y^p(t), \qquad \text{per } 0 < t < T_{max}(u_0), \end{aligned} \tag{3.23}$$

con $\epsilon = 1 - (\frac{a}{y(0)})^{p-1}$, per la (3.18) $\epsilon > 0$. La disequazione differenziale (3.23) può essere facilmente risolta per separazione delle variabili, ottenendo

$$y(t) \geq \frac{1}{(y^{1-p}(0) - (p-1)\epsilon t)^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{3.24}$$

da cui si ha che y non è definita globalmente e, chiaramente, lo stesso vale per u. □

Osservazione 3.4. Il Teorema 3.2 fornisce una stima per il tempo di esistenza massimale della soluzione. Dalla (3.24) segue direttamente che, se abbiamo

$$\int_\Omega u_0(x)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx \geq (2\lambda_\Omega^{(1)})^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.25}$$

allora sarà

$$T_{max}(u_0) \leq \frac{2}{p-1}\left(\int_\Omega u_0(x)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx\right)^{1-p},$$

poiché dalla (3.24) si ha che $T_{max}(u_0) \leq \frac{1}{\epsilon(p-1)}\left(\int_\Omega u_0(x)\varphi_\Omega^{(1)}(x)dx\right)^{1-p}$ e dalla (3.25) si ottiene $\epsilon^{-1} \leq 2$.

Definiamo il seguente funzionale:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx, \tag{3.26}$$

per $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$.

Nel lemma successivo dimostriamo che E è non crescente lungo le soluzioni di (2.4) e ne calcoliamo esplicitamente la derivata rispetto al tempo (per semplicità consideriamo il caso Ω limitato).

Lemma 3.2. *Sia Ω limitato. Consideriamo il problema (2.4) con $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Sappiamo che, sotto tali ipotesi, il problema è ben posto; sia u la soluzione massimale e sia $[0,T)$ il suo intervallo di definizione. Allora $E(u(x,\cdot)) \in C([0,T)) \cap C^1((0,T))$, e*

$$\frac{d}{dt}E(u)(t) = -\int_\Omega u_t^2(x,t)dx. \tag{3.27}$$

Dimostrazione. Si può dimostrare (anche per Ω non limitato) che la soluzione u di (2.4) con dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ è tale che $u \in C([0,T), H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$, da cui si ha che $E(u(x,\cdot)) \in C([0,T))$. Inoltre, si ha che $u \in C((0,T), H^2(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$. Per la dimostrazione di questi risultati si rinvia agli esempi 51.28 e 51.10 di [14].
Sia $G(u(x,t)) := \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$. Per $t, s \in (0,T)$, con $t \neq s$, dalla formula di integrazione per parti, si trova che

$$\begin{aligned}\frac{G(u(x,t)) - G(u(x,s))}{t-s} &= \frac{1}{t-s}\int_\Omega \nabla(u(x,t) - u(x,s))\cdot \nabla(u(x,t) + u(x,s))dx \\ &= -\int_\Omega \Big(\frac{u(x,t) - u(x,s)}{t-s}\Big)\triangle(u(x,t) + u(x,s))dx,\end{aligned}$$

dunque,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{G(u(x,t)) - G(u(x,s))}{t-s} &= \lim_{s\to t} -\int_\Omega \Big(\frac{u(x,t) - u(x,s)}{t-s}\Big)\triangle(u(x,t) + u(x,s))dx \\ &= -2\int_\Omega u_t(x,t)\triangle u(x,t)dx.\end{aligned}$$

Abbiamo, quindi, che $E(u(x,\cdot)) \in C^1((0,T))$ ed inoltre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u)(t) &= \int_\Omega (-\triangle u(x,t) - |u(x,t)|^{p-1}u(x,t))u_t(x,t)dx \\ &= -\int_\Omega u_t^2(x,t)dx.\end{aligned}$$

□

Il teorema seguente fornisce un'altra condizione sufficiente per il *blow-up*. Presentiamo due dimostrazioni: la prima vale nel caso di domini limitati e ci permetterà di ottenere una stima della norma in $L^2(\Omega)$ della soluzione di (2.4) quando tale soluzione risulta essere globale (si veda l'Osservazione 3.5); la seconda dimostrazione, invece, è valida anche nel caso in cui Ω sia non limitato. Per quest'ultima si utilizza un argomento di "concavità", si ricalca la dimostrazione di H.A. Levine in [12] (Teorema 1) applicandola al caso del problema (2.4).

Teorema 3.3. *Consideriamo il problema* (2.4)*, con dato iniziale* $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*. Se* $E(u_0) < 0$ *allora* $T_{max}(u_0) < \infty$*.*

Dimostrazione 1. (Per Ω limitato) Sia $\psi(t) := \|u(t)\|_2^2$. Moltiplicando la (2.4) per u si ha:

$$\frac{1}{2}\psi'(t) = \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx = -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx + \int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx \quad (3.28)$$

$$= -2E(u)(t) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx \geq -2E(u_0) + c\psi(t)^{\frac{p+1}{2}}, \quad (3.29)$$

$$\text{con } c := (p-1)/[(p+1)|\Omega|^{\frac{p-1}{2}}]. \quad (3.30)$$

La minorazione in (3.29) discende dal fatto che $E(u)(t)$ è decrescente e dalla disuguaglianza di Hölder applicata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\psi(t)^{\frac{p+1}{2}} = \Big(\int_\Omega |u(x,t)|^2dx\Big)^{\frac{p+1}{2}} &\leq \Big[\Big(\int_\Omega (|u(x,t)|^2)^{\frac{p+1}{2}}dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}\Big(\int_\Omega 1\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big]^{\frac{p+1}{2}} \\ &= \Big(\int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx\Big)|\Omega|^{\frac{p-1}{2}}.\end{aligned}$$

Se $E(u_0) < 0$, dalle (3.28)-(3.29) segue che

$$\frac{1}{2}\psi'(t) > c\psi(t)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{3.31}$$

Risolvendo la (3.31) per separazione delle variabili si trova che $\psi(t)$ non è definita globalmente. Da ciò segue che $T_{max}(u_0) < \infty$.
Possiamo indebolire le ipotesi richiedendo $2E(u_0) < c\psi(0)^{\frac{p+1}{2}}$, invece di $E(u_0) < 0$. Dalla (3.29) si ha:

$$\frac{1}{2}\psi'(t) > c\big(\psi(t)^{\frac{p+1}{2}} - \psi(0)^{\frac{p+1}{2}}\big), \tag{3.32}$$

da cui si ha che la funzione $\psi(t)$ è crescente per $t = 0$, dunque, con un ragionamento analogo a quello descritto nel corso della dimostrazione del Teorema 3.2, per $\delta > 0$ e sufficientemente vicino a zero risulta $\psi(\delta) > \psi(0)$ da cui si avrà che anche per $t = \delta$ la funzione $\psi(t)$ è crescente. Proseguendo in questo modo si ottiene che $\psi(t)$ è crescente per ogni tempo. Dunque se poniamo $f(t)^{\frac{p+1}{2}} := \psi(t)^{\frac{p+1}{2}} - \psi(0)^{\frac{p+1}{2}}$ si ha $f(t) > 0$ per $t > 0$ e la (3.32) può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{1}{2}f'(t) > cf(t)(f(t)^{\frac{p+1}{2}} + \psi(0)^{\frac{p+1}{2}})^{\frac{p-1}{p+1}} \geq cf(t)f(t)^{\frac{p-1}{2}} = cf(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

da cui si ha che f non è definita globalmente. Essendo $0 < f(t) \leq \psi(t)$ per ogni $t \in (0, T_{max}(u_0))$, segue che anche $\psi(t)$ non è definita globalmente. □

Dimostrazione 2. Supponiamo per assurdo $T_{max}(u_0) = \infty$. Definiamo la seguente applicazione:

$$M(t) := \frac{1}{2}\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds.$$

Allora abbiamo che

$$M'(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$$

e, utilizzando la (2.4),

$$\begin{aligned} M''(t) = \textstyle\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx &= -\textstyle\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx + \int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx \\ &= -(p+1)E(u)(t) + \tfrac{p-1}{2}\textstyle\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx \\ &\geq -(p+1)E(u_0) > 0, \end{aligned}$$

per l'ipotesi su $E(u_0)$. Dunque si ha che $M'(t) \to \infty$ per $t \to \infty$ e $M(t) \to \infty$ per $t \to \infty$. Dalla (3.27) e dall'ipotesi su $E(u_0)$ abbiamo che:

$$\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds = \int_0^t -\frac{d}{ds}E(u)(s)\, ds = E(u_0) - E(u)(t) < -E(u)(t),$$

da cui

$$M''(t) \geq -(p+1)E(u)(t) \geq (p+1)\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds$$

e

$$\begin{aligned} M(t)M''(t) &\geq \frac{p+1}{2}\left(\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds\right)\left(\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds\right) \\ &\geq \frac{p+1}{2}\left(\int_0^t \|u(s)\|_2\|u_t(s)\|_2 ds\right)^2 \qquad (3.33) \\ &\geq \frac{p+1}{2}\left(\int_0^t\int_\Omega u(x,s)u_t(x,s)dxds\right)^2 \qquad (3.34) \\ &= \frac{p+1}{2}\big(M'(t) - M'(0)\big)^2, \qquad (3.35) \end{aligned}$$

in cui per la (3.33) abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder con esponente 2 alle funzioni della variabile temporale $\|u(s)\|_2$ e $\|u_t(s)\|_2$, per la (3.34) abbiamo applicato ancora la disuguaglianza di Hölder con stesso esponente, questa volta alle funzioni $u(x,s)$ e $u_t(x,s)$ considerate rispetto alla variabile spaziale x. Poiché $M'(t) \to \infty$ per $t \to \infty$ e $p > 1$, dalla (3.35) possiamo dedurre che devono esistere $\alpha, t_0 > 0$ tali che

$$M(t)M''(t) \geq (1+\alpha)(M'(t))^2, \qquad \text{se } t \geq t_0. \qquad (3.36)$$

Consideriamo la funzione $M^{-\alpha}(t)$: si verifica facilmente che è non crescente e che la (3.36) implica che $[M^{-\alpha}(t)]'' \leq 0$ per $t \in [t_0, \infty)$. Dunque, la funzione $M^{-\alpha}(t)$ è non crescente e concava per $t \in [t_0, \infty)$ ma questo è in contraddizione con il fatto che, poiché $M(t) \to \infty$ per $t \to \infty$, $M^{-\alpha}(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Dunque si ha un assurdo che deriva dall'aver supposto u soluzione globale, da cui concludiamo che $T_{max}(u_0) < \infty$. $\square$

Osservazione 3.5. Nel caso di Ω limitato si ha che per ogni u soluzione globale del problema (2.4) vale la stima

$$\|u(t)\|_2 \leq \left(\frac{2E(u_0)}{c}\right)^{\frac{1}{p+1}} \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{3.37}$$

in cui c è la costante definita in (3.30). Il risultato segue dalla prima dimostrazione del Teorema 3.3.

Presentiamo ora un terzo criterio, esso ci assicura *blow-up* ad un tempo finito se al tempo iniziale la soluzione si trova sopra un *equilibrio* non negativo di (2.4). Per *equilibrio* del problema (2.4) intendiamo una funzione v che sia soluzione classica del problema stazionario, cioè:

$$\begin{cases} -\triangle v(x) = |v(x)|^{p-1} v(x) & \text{in } \Omega, \\ v(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.38}$$

Teorema 3.4. *Sia Ω limitato. Supponiamo che il problema (2.4) possieda un equilibrio v non negativo. Se $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ è tale che $u_0 \geq v$ e $u_0 \not\equiv v$, allora $T_{max}(u_0) < \infty$.*

Riportiamo un lemma che utilizzeremo per la dimostrazione del teorema.

Lemma 3.3. *Consideriamo un problema del tipo (2.1) con $f \in C^1(\mathbb{R})$ convessa e tale che $f(0) = 0$ e supponiamo Ω limitato. Siano $u_0, \underline{u}_0 \in L^\infty(\Omega)$ non identicamente coincidenti e tali che $u_0 \geq \underline{u}_0$. Per quanto affermato nell'Osservazione 3.2, sappiamo che per ognuno dei dati iniziali il problema (2.1) è ben posto. Siano u e $\underline{u}$ le soluzioni con dati iniziali rispettivamente u_0 e $\underline{u}_0$. Fissiamo $\tau \in (0, T_{max}(u_0))$.*

Allora $T_{max}(\underline{u}_0) \geq T_{max}(u_0)$ *ed esiste* $\alpha > 1$ *tale che*

$$u(x,t) \geq \alpha \underline{u}(x,t), \qquad \textit{per} \quad t \in [\tau, T_{max}(u_0)) \;\; \textit{e} \;\; x \in \Omega.$$

Dimostrazione (Lemma 3.3). Per il principio di confronto (Proposizione B.2 in Appendice) abbiamo che

$$\underline{u}(x,t) \leq u(x,t) \text{ per } (x,t) \in \Omega \times (0, \min(T_{max}(u_0), T_{max}(\underline{u}_0))).$$

Dalla convessità di f e dal fatto che $f(0) = 0$, segue che $f(s) \geq f'(0)s$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, da cui si ha che $\underline{u}$ è tale che

$$\underline{u}_t(x,t) - \triangle \underline{u}(x,t) \geq f'(0)\underline{u}(x,t) \qquad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

Sia $\underline{u}^0$ soluzione del problema lineare:

$$\begin{cases} \underline{u}^0_t(x,t) - \triangle \underline{u}^0(x,t) = f'(0)\underline{u}^0(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \underline{u}^0(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \underline{u}^0(x,t) = \underline{u}_0(x) & x \in \Omega, t = 0. \end{cases}$$

La funzione $\underline{u}^0$ è una funzione di classe $C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ (si veda l'Osservazione C.4 in Appendice) ed è definita globalmente. Per confronto (Proposizione B.2 in Appendice) abbiamo che $\underline{u}^0(x,t) \leq \underline{u}(x,t)$ per $(x,t) \in \Omega \times (0, T_{max}(\underline{u}_0))$ e dunque $\underline{u}^0(x,t) \leq \underline{u}(x,t) \leq u(x,t)$, per $(x,t) \in \Omega \times (0, \min(T_{max}(u_0), T_{max}(\underline{u}_0)))$, da cui, essendo $\underline{u}^0$ definita globalmente, possiamo dedurre che $T_{max}(\underline{u}_0) \geq T_{max}(u_0)$. Applicando il principio di confronto forte ed il Lemma di Hopf (Proposizione B.3 in Appendice) abbiamo che:

$$u(x,\tau) > \underline{u}(x,\tau) \qquad \text{per } x \in \Omega, \tag{3.39}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,\tau) < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu}(x,\tau) \qquad \text{per } x \in \partial\Omega. \tag{3.40}$$

La (3.40) fa sì che la (3.39) valga anche per x arbitrariamente vicino a $\partial\Omega$.

Infatti, scegliendo $y \in \partial\Omega$, per il Teorema di Lagrange e la (3.40), si ha:

$$\begin{aligned} u(x,\tau) - \underline{u}(x,\tau) &= \big[u(x,\tau) - \underline{u}(x,\tau)\big] - \big[u(y,\tau) - \underline{u}(y,\tau)\big] \\ &= (\nabla(u-\underline{u})(\xi,\tau),(x-y)) = |\nabla(u-\underline{u})(\xi,\tau)||x-y| \\ &= -\partial_\nu(u-\underline{u})(\xi,\tau)|x-y| > 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

in cui $\xi \in \{\theta x + (1-\theta)y,\ \text{con } \theta \in [0,1]\}$, x è lungo la normale a $\partial\Omega$ in y ed inoltre è molto vicino a y così da fare in modo che ξ sia arbitrariamente vicino alla frontiera e che la stima (3.40) valga anche in ξ. Dalla (3.41) segue che $u(x,\tau) > \underline{u}(x,\tau)$ anche per x arbitrariamente vicino a $\partial\Omega$.
Dunque esiste $\alpha > 1$ tale che $u(x,\tau) \geq \alpha\underline{u}(x,\tau)$ per $x \in \Omega$. Sfruttando nuovamente la convessità di f ed il fatto che $f(0)=0$, abbiamo che $f(\alpha\underline{u}) \geq \alpha f(\underline{u})$ e dunque

$$(\alpha\underline{u})_t - \triangle(\alpha\underline{u}) - f(\alpha\underline{u}) \leq \alpha(\underline{u}_t - \triangle\underline{u} - f(\underline{u})) = 0$$

e quindi

$$(\alpha\underline{u})_t - \triangle(\alpha\underline{u}) - f(\alpha\underline{u}) \leq u_t - \triangle u - f(u).$$

Applicando il principio di confronto con tempo iniziale τ alle funzioni $\alpha\underline{u}$ e u, si ha la tesi. $\square$

Dimostrazione (Teorema 3.4). Se applichiamo il Lemma 3.3, con $\underline{u}_0 = v$, abbiamo che esiste $\alpha > 1$ e $\tau \in (0, T_{max}(u_0))$, tale che

$$u(x,t) \geq \alpha v(x), \qquad \text{per} \quad t \in [\tau, T_{max}(u_0)) \ \text{ e } \ x \in \Omega. \tag{3.42}$$

Introduciamo la funzione $z(t) := \int_\Omega u(x,t)v(x)dx$. Se moltiplichiamo la prima equazione in (2.4) per v, integriamo su Ω e applichiamo la formula di Green, analogamente a come è stato fatto per la (3.20), otteniamo

$$z'(t) = \int_\Omega u_t(x,t)v(x)dx = \int_\Omega u(x,t)\triangle v(x)dx + \int_\Omega u^p(x,t)v(x)dx, \tag{3.43}$$

poiché v è soluzione di (3.38), possiamo scrivere il membro di destra come

$$\int_\Omega u^p(x,t)v(x) - v^p(x)u(x,t)dx = \int_\Omega \Big[1 - \Big(\frac{v(x)}{u(x,t)}\Big)^{p-1}\Big]u^p(x,t)v(x)dx,$$

notiamo che l'espressione di destra ha senso in quanto sappiamo che, se $t \in [\tau, T_{max}(u_0))$ e $x \in \Omega$, $u(x,t) \geq \alpha v(x) > v(x) \geq 0$. Sfruttando la (3.42), per $t \in [\tau, T_{max}(u_0))$, possiamo minorare il membro di destra nella (3.43), ottenendo:

$$z'(t) \geq (1-\alpha^{1-p}) \int_\Omega u^p(x,t)v(x)dx \geq (1-\alpha^{1-p})\Big(\int_\Omega v(x)dx\Big)^{1-p} z^p(t), \quad (3.44)$$

in cui per l'ultima minorazione abbiamo sfruttato la seguente disuguaglianza

$$\Big(\int_\Omega u(x,t)v(x)dx\Big)^p \leq \Big(\int_\Omega u^p(x,t)v(x)dx\Big)\Big(\int_\Omega v(x)dx\Big)^{p-1},$$

che si ottiene dalla disuguaglianza di Hölder nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega u(x,t)v(x)dx\Big)^p &= \Big(\int_\Omega u(x,t)v(x)^{\frac{1}{p}}v(x)^{\frac{p-1}{p}}dx\Big)^p \\ &\leq \Big[\Big(\int_\Omega \big(u(x,t)v(x)^{\frac{1}{p}}\big)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega \big(v(x)^{\frac{p-1}{p}}\big)^{\frac{p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big]^p \\ &= \Big(\int_\Omega u(x,t)^p v(x)dx\Big)\Big(\int_\Omega v(x)dx\Big)^{p-1}.\end{aligned}$$

Dunque, dalla (3.44), si ha

$$z'(t) \geq Cz^p(t), \qquad \text{per } t \in [\tau, T_{max}(u_0)), \quad (3.45)$$

con $C > 0$ costante. La (3.45) ci permette di concludere direttamente che u non può esistere globalmente ma deve essere $T_{max}(u_0) < \infty$. □

L'ultimo criterio che presentiamo in questa sezione vale se Ω è tutto $\mathbb{R}^N$ e afferma che la soluzione di (2.4) esplode ad un tempo finito se il dato iniziale u_0 è non negativo ed ha un decadimento “sufficientemente lento” a infinito. La dimostrazione è quella di T. Lee e W.M. Ni in [11] (Teorema 3.2 (i)). Fissato $R > 0$, in analogia con la notazione usata in precedenza, indicheremo con $\lambda^{(1)}_{B_R(0)}$ il primo autovalore dell'operatore $-\triangle$ per il problema di Dirichlet sulla palla di centro l'origine e raggio R, e con $\varphi^{(1)}_{B_R(0)}$ la corrispondente autofunzione con integrale unitario su $B_R(0)$.

Teorema 3.5. *Consideriamo il problema* (2.4)*, con* $\Omega = \mathbb{R}^N$.
Se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$*,* $u_0 \geq 0$ *e tale che*

$$\liminf_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{2}{p-1}} u_0(x) > (\lambda^{(1)}_{B_1(0)})^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.46}$$

allora $T_{max}(u_0) < \infty$.

Dimostrazione. Sia $R > 0$, supponiamo per assurdo $T_{max}(u_0) = \infty$. Dal Teorema 3.2 sappiamo che deve essere

$$\int_{B_R(0)} u_0(x)\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)dx \leq (\lambda^{(1)}_{B_R(0)})^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.47}$$

Applicando la formula di Green e sfruttando $\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x) = 0$ per $x \in \partial B_R(0)$, si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)} \varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)\triangle u(x,t)dx = -\int_{B_R(0)} \nabla\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)\cdot\nabla u(x,t)dx \\
&= \int_{B_R(0)} u(x,t)\triangle\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x) - \int_{\partial B_R(0)} u(x,t)\partial_\nu\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)d\sigma \\
&\geq -\lambda^{(1)}_{B_R(0)}\int_{B_R(0)} u(x,t)\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)dx,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

avendo sfruttato, per l'ultima minorazione, la definizione di $\varphi^{(1)}_{B_R(0)}$ per scrivere il primo termine di (3.48) ed il fatto che $u \geq 0$ (essendo $u_0 \geq 0$ per ipotesi) e $\partial_\nu\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x) < 0$ per $x \in \partial B_R(0)$ dal Lemma di Hopf (pag.9) per minorare il secondo. Si verifica facilmente, riscalando le variabili, che

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x) = R^{-N}\varphi^{(1)}_{B_1(0)}(R^{-1}x) \quad \text{per } x \in B_R(0) \\
&\text{e} \quad \lambda^{(1)}_{B_R(0)} = R^{-2}\lambda^{(1)}_{B_1(0)}.
\end{aligned}$$

Dalla (3.47) abbiamo che, per ogni $\epsilon \in (0,1)$,

$$(\lambda^{(1)}_{B_1(0)})^{\frac{1}{p-1}} R^{-\frac{2}{p-1}} \geq \int_{\epsilon R<|x|<R} u_0(x)\varphi^{(1)}_{B_R(0)}(x)dx$$
$$\geq \big(\inf_{\epsilon R<|x|<R} u_0(x)\big) \int_{\epsilon R<|x|<R} R^{-N}\varphi^{(1)}_{B_1(0)}(R^{-1}x)dx,$$

da cui

$$(\lambda^{(1)}_{B_1(0)})^{\frac{1}{p-1}} \geq \big(\inf_{\epsilon R<|x|<R} |x|^{\frac{2}{p-1}} u_0(x)\big) \int_{\epsilon<|y|<1} \varphi^{(1)}_{B_1(0)}(y)dy.$$

Facendo il limite per $\epsilon \to 0$, e poi per $R \to \infty$ troviamo

$$(\lambda^{(1)}_{B_1(0)})^{\frac{1}{p-1}} \geq \liminf_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{2}{p-1}} u_0(x),$$

che è in contraddizione con l'ipotesi (3.46), dunque si ha la tesi. □

Risultati simili al precedente si hanno anche per domini non limitati più generali dell'intero spazio, un esempio è quanto dimostrato da P. Souplet e F.B. Weissler in *Self-similar subsolutions and blowup for nonlinear parabolic equations*, pubblicato sul Journal of Mathematical Analysis and Applications nel 1997 (Vol.212 pag.60-74).

Osservazione 3.6. Siano Ω_1 e Ω_2 tali che $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Sia $u_0 \in L^\infty(\Omega_1)$ e $u_0(x) \geq 0$ per $x \in \Omega_1$. Poniamo $u_0(x) = 0$ per $x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1$. Siano u_1 e u_2 le soluzioni di (2.4) con dato iniziale u_0 nei domini Ω_1 e Ω_2 rispettivamente. Poiché $0 = u_1 \leq u_2$ su $\partial\Omega_1$, per il principio di confronto (Proposizione B.2 in Appendice) applicato sul dominio Ω_1, si ha che $0 \leq u_1 \leq u_2$ in tutto Ω_1 e dunque se u_1 non è definita globalmente allora anche u_2 non può essere globale. In questo senso il Teorema 3.2 ed il Teorema 3.4, in cui si suppone che il dominio sia limitato, possono essere utilizzati, in alcuni casi, per dedurre *blow-up* anche su domini non limitati.

Capitolo 4

Esistenza di soluzioni globali

In questo capitolo, come nel precedente, supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sia un dominio regolare di classe $C^{2+\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$.

4.1 Preliminari

Riportiamo brevemente alcune definizioni, proprietà e risultati fondamentali che applicheremo al caso di problemi del tipo (2.1).

Definizione 4.1. *Sia (X,d) uno spazio metrico completo, e $\tau : X \to (0,\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente.*
Un'applicazione $\varphi : X \times [0,\infty) \to X$ definita per ogni (u_0,t), con $u_0 \in X$ e $t \in [0,\tau(u_0))$, è detta un sistema dinamico (locale) *su X se:*

1. *$\varphi(u_0,\cdot) : [0,\tau(u_0)) \to X$ è continua;*

2. *$\varphi(\cdot,t) : X \to X$ è continua in u_0, per ogni $u_0 \in X$ e $t < \tau(u_0)$;*

3. *$\varphi(u_0,0) = u_0$ per ogni $u_0 \in X$;*

4. *$\tau(\varphi(u_0,s)) = \tau(u_0) - s$ e $\varphi(u_0,t+s) = \varphi(\varphi(u_0,s),t)$ per ogni $u_0 \in X$, $s \in [0,\tau(u_0))$ e $t \in [0,\tau(u_0)-s)$.*

Diciamo che $v \in X$ è un *equilibrio* per il sistema dinamico descritto da φ, se è tale che $\tau(v) = \infty$ e $\varphi(v,t) = v$ per ogni $t \geq 0$. Denotiamo con S l'insieme di tali equilibri.

Sia $u_0 \in X$, se $\tau(u_0) = \infty$ possiamo definire il seguente insieme, detto *insieme ω-limite di $\varphi(u_0, \cdot)$*:

$$\begin{aligned}\omega(u_0) := \{v \in X : \text{esiste una successione } t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty, \\ \text{tale che } \varphi(u_0, t_k) \to v, \text{ per } k \to \infty\},\end{aligned} \tag{4.1}$$

chiaramente $\omega(\varphi(u_0, t)) = \omega(u_0)$ per ogni $t > 0$.

Proposizione 4.1. *Siano u_0, $v \in X$ e φ un sistema dinamico (locale) su X. Se $\tau(u_0) = \infty$ e $v \in \omega(u_0)$, allora $\varphi(v, t) \in \omega(u_0)$ per ogni $t \in [0, \tau(v))$.*

Dimostrazione. Poiché $v \in \omega(u_0)$, esiste una successione $\{t_k\}$ tale che

$$t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad \varphi(u_0, t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v. \tag{4.2}$$

Fissato $t \in [0, \tau(v))$, poniamo $\tau_k := t_k + t$. Sfruttando la proprietà 4 della Definizione 4.1 e la (4.2) si ha $\varphi(u_0, \tau_k) = \varphi(u_0, t_k + t) = \varphi(\varphi(u_0, t_k), t) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(v, t)$. La successione $\{\tau_k\}$ è tale che $\tau_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ e $\varphi(u_0, \tau_k) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(v, t)$, dunque $\varphi(v, t) \in \omega(u_0)$.

□

Proposizione 4.2. *Sia $u_0 \in X$ e φ un sistema dinamico (locale) su X. Supponiamo che*

$$\tau(u_0) = \infty \quad e \quad K := \bigcup_{t\geq 0} \{\varphi(u_0, t)\} \ \textit{è relativamente compatto in } X. \tag{4.3}$$

Allora $\tau(v) = \infty$ per ogni $v \in \omega(u_0)$, $\omega(u_0)$ è compatto, connesso, non vuoto, invariante (cioè $\varphi(\omega(u_0), t) = \omega(u_0)$ per ogni $t > 0$) e $dist(\varphi(u_0, t), \omega(u_0)) \to 0$ per $t \to \infty$.

Dimostrazione. L'insieme ω-limite di $\varphi(u_0, \cdot)$, definito nella (4.1), può essere caratterizzato nel modo seguente:

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t\geq s} \{\varphi(u_0, t)\}}. \tag{4.4}$$

L'insieme $\omega(u_0)$, essendo intersezione di chiusi, è un chiuso. Per la (4.3) l'insieme $\overline{K}$ è un compatto ed inoltre dalla (4.4) segue che $\omega(u_0) \subset \overline{K}$. Dunque, $\omega(u_0)$ è un compatto essendo un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto.

Sia $\{t_k\}$ una successione tale che $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. L'insieme $\{\varphi(u_0, t_k)\}$ è relativamente compatto dato che $\{\varphi(u_0, t_k)\} \subset K$ e K è relativamente compatto. Dunque, a meno di estrarre una sottosuccessione, esiste $v \in X$ tale che $\varphi(u_0, t_k) \to v$. Dalla definizione di $\omega(u_0)$ segue che $v \in \omega(u_0)$ e dunque $\omega(u_0)$ è non vuoto.

Dimostriamo, ora, che $\tau(v) = \infty$ per ogni $v \in \omega(u_0)$. Supponiamo per assurdo che esista $v \in \omega(u_0)$ tale che $\tau(v) < \infty$ e scegliamo una successione

$$\{t_k\} \subset [0, \tau(v)), \text{ tale che } t_k \xrightarrow{k\to\infty} \tau(v). \tag{4.5}$$

Dalla Proposizione 4.1 sappiamo che $\varphi(v, t) \in \omega(u_0)$ per ogni $t \in [0, \tau(v))$, dunque l'insieme $\{\varphi(v, t_k)\} \subset \omega(u_0)$ ed $\omega(u_0)$, come abbiamo appena visto, è un compatto, ne segue che $\{\varphi(v, t_k)\}$ è relativamente compatto in X. Dunque, a meno di estrarre una sottosuccessione, esiste $v_\infty \in X$ tale che $\varphi(v, t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v_\infty$. Dalla proprietà 4 della Definizione 4.1 abbiamo che $\tau(\varphi(v, t_k)) = \tau(v) - t_k$ e dunque, per la (4.5), $\tau(\varphi(v, t_k)) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. D'altra parte $\tau(v_\infty) > 0$ e, dunque, si ha una contraddizione con la semicontinuità inferiore di τ (Definizione 4.1) da cui possiamo concludere che $\tau(v) = \infty$.

Proviamo l'invarianza di $\omega(u_0)$. Dalla Proposizione 4.1 abbiamo che se $v \in \omega(u_0)$ allora $\varphi(v, t) \in \omega(u_0)$ per ogni $t > 0$. Dunque $\varphi(\omega(u_0), t) \subseteq \omega(u_0)$ per ogni $t > 0$. Resta da provare l'inclusione inversa. Sia $v \in \omega(u_0)$ e $\{t_k\}$ una successione tale che $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ e $\varphi(u_0, t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v$. Sia $t > 0$ e poniamo $\tau_k := t_k - t$. L'insieme $\{\varphi(u_0, \tau_k)\}$ è un sottoinsieme di K e dunque è relativamente compatto in X. A meno di estrarre una sottosuccessione esiste $w \in X$ tale che $\varphi(u_0, \tau_k) \xrightarrow{k\to\infty} w$ e $w \in \omega(u_0)$. Allora, dalla continuità di φ e dalla proprietà 4 nella Definizione 4.1, segue che

$$\begin{aligned}
\varphi(w, t) &= \varphi(\lim_{k\to\infty} \varphi(u_0, \tau_k), t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(\varphi(u_0, \tau_k), t) \\
&= \lim_{k\to\infty} \varphi(u_0, \tau_k + t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(u_0, t_k) = v,
\end{aligned}$$

da cui si ha $\omega(u_0) \subseteq \varphi(\omega(u_0), t)$.

Proviamo che $dist(\varphi(u_0,t), \omega(u_0)) \to 0$ per $t \to \infty$. Supponiamo per assurdo che esista una successione $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ e $\epsilon > 0$ tale che $dist(\varphi(u_0,t_k), \omega(u_0)) \geq \epsilon \ \forall\, k$. Sappiamo che $\{\varphi(u_0,t_k)\}$ è relativamente compatto in X per cui, a meno di estrarre una sottosuccessione, esiste $v \in X$ tale che $\varphi(u_0,t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v$ e $v \in \omega(u_0)$. Ciò è chiaramente in contraddizione con l'aver supposto $dist(\varphi(u_0,t_k), \omega(u_0)) \geq \epsilon$ per ogni k.

Dimostriamo, infine, la connessione di $\omega(u_0)$. Per ogni $s > 0$, l'insieme $\bigcup_{t\geq s}\{\varphi(u_0,t)\}$ è connesso e relativamente compatto in X per cui la sua chiusura è connessa e compatta. Dall'espressione (4.4) per $\omega(u_0)$ segue che $\omega(u_0)$ è costituito dall'intersezione decrescente di insiemi compatti e connessi ed è, dunque, un insieme connesso. $\square$

Un'applicazione continua $F : X \to \mathbb{R}$ è detta *funzionale* (o *funzione*) *di Lyapunov* per φ se $F(\varphi(u_0,t)) \leq F(u_0)$ per ogni $u_0 \in X$ e $t \in [0, \tau(u_0))$. Si dice che F è *funzionale di Lyapunov stretto* se è un funzionale di Lyapunov ed, inoltre, verifica la seguente condizione:
se $F(\varphi(v,t)) = F(v)$ per ogni $t \in [0, \tau(v))$ allora v è un equilibrio.

Proposizione 4.3. *Sia $u_0 \in X$, φ un sistema dinamico (locale) su X e F un funzionale di Lyapunov per φ. Supponiamo che valga la* (4.3)*. Allora si ha che*

$$\lim_{t\to\infty} F(\varphi(u_0,t)) = F(v) \qquad \textit{per ogni } v \in \omega(u_0). \tag{4.6}$$

Dimostrazione. La funzione $t \to F(\varphi(u_0,t))$ è non crescente e continua. L'insieme $K = \bigcup\{\varphi(u_0,t) \,:\, t \geq 0\}$ è, per ipotesi, relativamente compatto e dunque limitato, perciò, essendo F continua, anche $F(K)$ è limitato. Dunque esiste finito $\lim_{t\to\infty} F(\varphi(u_0,t))$.
Sia $v \in \omega(u_0)$, allora esiste una successione $\{t_k\}$ tale che $t_k \to \infty$ e $\varphi(u_0,t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v$. Dalla continuità di F segue che $F(\varphi(u_0,t_k)) \xrightarrow{k\to\infty} F(v)$, ossia la (4.6). $\square$

Proposizione 4.4. *Sia $u_0 \in X$, φ un sistema dinamico (locale) su X e F un funzionale di Lyapunov stretto per φ. Supponiamo che la* (4.3) *sia* *soddisfatta. Allora S, l'insieme degli equilibri di φ, è un insieme chiuso e non vuoto e $dist(\varphi(u_0,t),S) \to 0$ per $t \to \infty$. In particolare $\omega(u_0)$ è costituito da equilibri.*

Dimostrazione. L'insieme S è dato da

$$S := \{v \in X \text{ tale che } \tau(v) = \infty \text{ e } \varphi(v,t) = v \text{ per ogni } t \geq 0\}.$$

Dalla continuità di φ segue direttamente che S è un insieme chiuso. L'insieme $\omega(u_0)$ è non vuoto per la Proposizione 4.2. Sia $v \in \omega(u_0)$ e $t \geq 0$. Allora abbiamo che $\tau(v) = \infty$ per la Proposizione 4.2 e $\varphi(v,t) \in \omega(u_0)$, per ogni $t \geq 0$, per la Proposizione 4.1. Dalla Proposizione 4.3 segue che $F(\varphi(v,t)) = F(v)$ per ogni $t \geq 0$. Essendo F un funzionale di Lyapunov stretto segue che $v \in S$ e dunque S è non vuoto. In particolare, $\omega(u_0) \subseteq S$, e dunque $\omega(u_0)$ è costituito da equilibri. Inoltre, poiché per la Proposizione 4.2 $dist(\varphi(u_0,t),\omega(u_0)) \to 0$ per $t \to \infty$ si ha anche che $dist(\varphi(u_0,t),S) \to 0$ per $t \to \infty$. □

Possiamo considerare come spazio X uno spazio di Banach sul quale è ben posto un problema del tipo (2.1) e, in particolare, il problema (2.4). Possiamo interpretare tale problema parabolico come sistema dinamico locale ponendo, per ogni $u_0 \in X$, $\tau(u_0) = T_{max}(u_0)$, tempo di esistenza massimale della soluzione con dato iniziale u_0 (per la definizione di T_{max} si veda la Proposizione 3.1), e $\varphi(u_0,t) = u(x,t)$, denotando con $u(x,t)$ la soluzione di (2.4) con dato iniziale u_0 al tempo t. Secondo la definizione data nella Sezione 3.1, $\varphi(u_0,t)$ è detta *globale* se $\tau(u_0) = \infty$.

Osservazione 4.1. Consideriamo il problema (2.4). Si può dimostrare che esso genera un sistema dinamico in $X = H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, con $q \geq \max\Big(\frac{N(p-1)}{2}, p+1\Big)$ (per la dimostrazione si rimanda a [14] esempio 51.28). Richiamiamo il funzionale definito in (3.26):

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx. \tag{4.7}$$

Dal Lemma 3.2 segue che E è un funzionale di Lyapunov stretto.
Supponiamo Ω un dominio limitato di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$, e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tale che $T_{max}(u_0) = \infty$ e $\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_\infty < \infty$, denotando con u la soluzione del problema (2.4) con dato iniziale u_0. Si può dimostrare (si veda [14] esempio 51.38 e 51.39) che, sotto tali ipotesi, l'insieme $\{u(\cdot,t) : t \geq 1\}$ è relativamente compatto in $X = H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, da cui, applicando la Proposizione 4.4, si ha che l'insieme $\omega(u_0)$ è non vuoto nella topologia di X e costituito da equilibri, i quali coincidono con gli equilibri classici del problema (2.4), ossia le soluzioni classiche del problema stazionario (3.38). Inoltre, la convergenza $u(\cdot,t_k) \xrightarrow{k\to\infty} v(\cdot) \in \omega(u_0)$ (in cui $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$) in X vale anche in $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, per ogni $\beta \in (0,1)$.
Si può dimostrare che quanto affermato rimane vero anche considerando lo spazio $X = H^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e problemi del tipo (2.1) con $f \in C^1(\mathbb{R})$. Per maggiori dettagli riguardo ai risultati citati si veda [14] esempio 53.7.

4.2 Soluzioni globali e stabilità asintotica

Richiamiamo il problema (2.1) presentato all'inizio del Capitolo 2:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = f(u(x,t)) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

in cui supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) un dominio di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$, ed f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Useremo d'ora in poi la seguente notazione:

$$q_c := \frac{N(p-1)}{2}; \tag{4.9}$$

$$p_S := \begin{cases} \frac{N+2}{N-2} & \text{se } N > 2, \\ \infty & \text{se } N = 2. \end{cases} \tag{4.10}$$

Definizione 4.2. *Sia X uno spazio di Banach in cui il problema* (4.8) *è localmente ben posto. Supponiamo $f(0) = 0$.*
La funzione nulla, soluzione di (4.8)*, si dice soluzione* asintoticamente stabile *in X se esiste una costante $\eta > 0$, tale che, per ogni $u_0 \in X$ con $\|u_0\|_X \leq \eta$, si ha*

$$T_{max}(u_0) = \infty \qquad e \qquad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_X = 0,$$

denotando con $u(t)$ la soluzione di (4.8) *con dato iniziale u_0 al tempo t.*
Diremo che la soluzione nulla è esponenzialmente asintoticamente stabile *in X se esistono costanti η, $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tali che, per ogni $u_0 \in X$ con $\|u_0\|_X \leq \eta$, si ha*

$$T_{max}(u_0) = \infty \qquad e \qquad \|u(t)\|_X \leq K\|u_0\|_X e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

Il prossimo teorema ci fornisce alcune condizioni sulla funzione f affinché $u \equiv 0$ sia soluzione esponenzialmente asintoticamente stabile di (4.8).
Secondo la notazione introdotta nella Sezione 3.2, denotiamo con $\lambda_\Omega^{(1)}$ il primo

autovalore dell'operatore $-\triangle$ per il problema di Dirichlet in Ω.

Prima di enunciare il teorema riportiamo un risultato che utilizzeremo nella dimostrazione. Si tratta di una generalizzazione del principio di massimo per il problema ellittico.

Proposizione 4.5. *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$. Consideriamo il seguente problema:*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) - \lambda u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

in cui $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda < \lambda_\Omega^{(1)}$ e $f \geq 0$ in Ω allora, denotando con u la soluzione di (4.11)*, si ha $u \geq 0$ in Ω.*

Per $\lambda \leq 0$ il risultato è una nota generalizzazione del principio di massimo[(1)]; per $0 < \lambda < \lambda_\Omega^{(1)}$ si dimostra facilmente sfruttando la formulazione debole del problema (4.11) utilizzando come funzione test la funzione u^-.

Teorema 4.1. *Consideriamo il problema* (4.8)*, supponiamo Ω un dominio limitato e $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) < \lambda_\Omega^{(1)}$. Allora la soluzione nulla è esponenzialmente asintoticamente stabile in $L^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi su f' discende che $|f'(\xi)| \leq (\lambda_\Omega^{(1)} - 2\epsilon)$ per $\epsilon \in (0, \frac{\lambda_\Omega^{(1)}}{2})$ e $|\xi|$ sufficientemente piccolo, dunque esiste $\eta > 0$ tale che

$$|f(s)| \leq (\lambda_\Omega^{(1)} - 2\epsilon)|s|, \qquad |s| \leq \eta. \tag{4.12}$$

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} -\triangle \psi(x) = (\lambda_\Omega^{(1)} - \epsilon)\psi(x) + (\lambda_\Omega^{(1)} - \epsilon) & \text{in } \Omega, \\ \psi(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

(1) Si veda, ad esempio, L.C. Evans *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.

Dai risultati di regolarità per problemi ellittici lineari[(2)] abbiamo che esiste ed è unica la soluzione di (4.13) e, denotando con ψ tale soluzione, si ha che $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$. Inoltre, per la Proposizione 4.5, $\psi \geq 0$ in Ω. Sia $\varphi := 1 + \psi$. La funzione φ è di classe $C^2(\overline{\Omega})$ ed è tale che

$$\begin{cases} -\triangle\varphi(x) = (\lambda_\Omega^{(1)} - \epsilon)\varphi(x), & \text{in } \Omega, \\ \varphi(x) \geq 1, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Introduciamo ora la funzione $\overline{u}$, definita nel modo seguente:

$$\overline{u}(x,t) = \overline{\eta}e^{-\epsilon t}\varphi(x), \qquad \text{con } \overline{\eta} := \Big(\max_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x)\Big)^{-1}\eta.$$

Dalla (4.12) e dalla (4.16), per calcolo diretto, si ha che:

$$\overline{u}_t(x,t) - \triangle\overline{u}(x,t) = (\lambda_\Omega^{(1)} - \epsilon)\overline{u}(x,t) \geq f(\overline{u}(x,t)), \qquad \text{per } x \in \Omega \text{ e } t > 0,$$

in cui la maggiorazione è conseguenza della (4.12) con $s = \overline{u}$. Se supponiamo $\|u_0\|_\infty \leq \overline{\eta}$, allora $|u_0| \leq \|u_0\|_\infty \leq \overline{\eta} \leq \overline{\eta}\varphi(x) = \overline{u}(x,0)$, dunque $\overline{u}(\cdot,0) \geq |u_0|$. Dal principio di confronto (Proposizione B.2 in Appendice) possiamo dedurre che $u(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ per $(x,t) \in \Omega \times (0, T_{max}(u_0))$. Consideriamo ora

[(2)]Si tratta di una generalizzazione del Teorema di regolarità di Schauder (pag.8) a problemi del tipo

$$-\triangle u(x) + cu(x) = f(x) \qquad \text{in } \Omega, \tag{4.14}$$

$$\text{con } |c| \leq m \quad \text{e} \quad m > 0 \text{ costante.} \tag{4.15}$$

Teorema 4.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$, consideriamo l'equazione (4.14) in cui supponiamo (4.15) e $c \leq 0$. Sia f tale che $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e sia $g \in C(\partial\Omega)$. Allora esiste un'unica funzione u soluzione (classica) di (4.14) tale che $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u = g$ in $\partial\Omega$.*

Abbiamo riportato il teorema nella forma che più si adatta al problema (4.13). In realtà esso vale in una forma più generale (per questo e per altri risultati di regolarità si veda [14]).

la funzione $-\overline{u}$, essa è tale che

$$\begin{aligned}(-\overline{u})_t(x,t) - \triangle(-\overline{u})(x,t) &= -(\overline{u}_t(x,t) - \triangle\overline{u}(x,t)) \\ &= -(\lambda_\Omega^{(1)} - \epsilon)\overline{u}(x,t) \leq f(-\overline{u}(x,t)), \\ \text{per } x \in \Omega \text{ e } t > 0,\end{aligned}$$

in cui l'ultima maggiorazione discende dalla (4.12) con $s = -\overline{u}$. Poiché $\overline{u}(\cdot, 0) \geq |u_0|$, possiamo di nuovo applicare il principio di confronto considerando, questa volta, le funzioni u e $-\overline{u}$. Otteniamo che $u(x,t) \geq -\overline{u}(x,t)$ per $(x,t) \in \Omega \times (0, T_{max}(u_0))$. Da $-\overline{u} \leq u \leq \overline{u}$ segue che $T_{max}(u_0) = \infty$ e la tesi. □

Torniamo a considerare più nel dettaglio il problema (2.4) che richiamiamo:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) è un dominio di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$.
Consideriamo il problema negli spazi $L^q(\Omega)$ con $q \geq q_c$ (q_c definito in (4.9)), in cui, come dimostrato nel Teorema 2.1, il problema è ben posto. Presentiamo alcuni teoremi che forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza globale o non globale della soluzione e, nel caso di esistenza globale, mostrano condizioni per la stabilità asintotica delle soluzioni.
Per il primo teorema è necessario introdurre il concetto di *raggio interno* di un dominio Ω:

$$\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} dist(x, \partial\Omega).$$

Sottolineiamo il fatto che per ogni $q \in [1,\infty]$ se Ω è un dominio regolare (è sufficiente che soddisfi la condizione di cono esterno uniforme[(3)]) si ha che le

[(3)]Dato un dominio Ω, si dice che Ω soddisfa la *condizione di cono esterno* se è tale che per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un cono finito circolare retto V_x di vertice x tale che $V_x \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

seguenti condizioni sono equivalenti:

- $\rho(\Omega) < \infty$,
- vale la disuguaglianza di Poincaré in Ω:

$$\|\Phi\|_q \le C(\Omega, q)\|\nabla\Phi\|_q, \qquad \Phi \in W_0^{1,q}(\Omega),\ q \in [1, \infty).$$

Il teorema afferma che, per ogni $q_c < q \le \infty$, la soluzione nulla è asintoticamente stabile in $L^q(\Omega)$ se e solo se Ω ha raggio interno finito.

Teorema 4.3. *Consideriamo il problema* (4.17)*, con* $p > 1$ *e* $1 \le q \le \infty$*.*

(i) *Supponiamo* $q > q_c$ *o* $q = q_c > 1$*. Se* $\rho(\Omega) < \infty$*, allora la soluzione nulla è esponenzialmente asintoticamente stabile in* $L^q(\Omega)$*.*

(ii) *Supponiamo* $q > q_c$*. Se* $\rho(\Omega) = \infty$*, allora la soluzione nulla non è asintoticamente stabile in* $L^q(\Omega)$*. In particolare esistono dati iniziali* $u_0 \in L^q(\Omega)$ *di norma "comunque piccola" per i quali si ha* $T_{max}(u_0) < \infty$*.*

Osservazione 4.2. Nel caso critico $q = q_c$ il secondo punto del teorema precedente non è più valido, tuttavia si può dimostrare che, per ogni dominio Ω, incluso l'intero spazio $\mathbb{R}^N$, la soluzione nulla è asintoticamente stabile in $L^{q_c}(\Omega)$. La stabilità è esponenziale solo nel caso in cui $\rho(\Omega) < \infty$.

Questi risultati sono stati ottenuti da P. Souplet: in [16] egli studia il problema in $L^q(\Omega)$ con $q \in (1, \infty)$ e in [17] completa l'analisi occupandosi del caso $q = 1$ e $q = \infty$.
Per la dimostrazione del Teorema 4.3 e dell'Osservazione 4.2 si veda anche [14].

Si dice che Ω soddisfa la *condizione di cono esterno uniforme* se per ogni $x \in \partial\Omega$ soddisfa la condizione di cono esterno con V_x congruente ad uno stesso cono V per ogni $x \in \partial\Omega$. Per la definizione di dominio soddisfacente la *condizione di cono interno* e di *cono interno uniforme* si veda la nota **(2)** a pag.37. Per tali definizioni si rimanda a D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.

Presentiamo ora un nuovo metodo per studiare soluzioni globali chiamato della *buca di potenziale*. Questo metodo fu introdotto da D.H. Sattinger in [15], egli lo utilizzò per studiare l'esistenza globale di soluzioni deboli per problemi iperbolici non lineari. In seguito altri, fra cui M. Tsutsumi[(4)] e H. Ishii[(5)], lo applicarono a problemi di tipo parabolico.

Supporremo Ω un dominio limitato e $1 < p \leq p_S$.
Oltre al funzionale E, definito in (4.7), considereremo anche un nuovo funzionale:

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Chiamiamo *buca di potenziale* associata al problema (4.17) l'insieme

$$W := \{u \in H_0^1(\Omega) : E(u) < d,\, I(u) > 0\} \cup \{0\},$$

in cui d, chiamata *profondità* della buca di potenziale, è definita nel modo seguente:

$$d := \inf\{E(u) : u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\},\, I(u) = 0\}. \tag{4.18}$$

L'insieme

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} \ : \ I(u) = 0\} \tag{4.19}$$

si dimostra essere una varietà hilbertiana e si chiama *varietà di Nehari*[(6)].

[(4)] Si veda *On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space*, Mathematica Japonica, Vol.17 (1972), pag.173-193.

[(5)] Si veda *Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations*, Journal of Differential Equations, Vol.26 (1977), pag.291-319.

[(6)] Sia X uno spazio di Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tale che $\Phi'(0) = 0$. La *varietà di Nehari* associata al funzionale Φ si definisce nel modo seguente:

$$N := \{u \in X : \langle \Phi'(u), u \rangle = 0,\, u \neq 0\}.$$

Secondo quanto dimostrato nel Paragrafo 1.1.2, il funzionale

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx,$$

Dimostreremo nel seguito (Lemma 4.1) che $d = \frac{p-1}{2(p+1)}\mathcal{C}_p^{\frac{2(p+1)}{p-1}}$, in cui $\mathcal{C}_p^{-1}$ è la costante ottimale relativamente all'immersione continua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ (valida in quanto stiamo supponendo $1 < p \leq p_S$), cioè

$$\mathcal{C}_p := \inf\Big\{\frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_{p+1}} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\Big\}. \tag{4.20}$$

Definiamo, infine, l'insieme

$$Z := \{u \in H_0^1(\Omega) : E(u) < d,\, I(u) < 0\}.$$

Supponiamo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Notiamo che il problema (4.17) è ben posto in $L^{p+1}(\Omega)$, infatti, poiché $p \leq p_S$ si ha $p + 1 \geq q_c$. Denoteremo con u la $L^{p+1}(\Omega)$-soluzione classica massimale di (4.17).

Teorema 4.4. *Sia Ω un dominio limitato. Consideriamo il problema* (4.17).

(i) *Sia $1 < p < p_S$. Se $u_0 \in W$, allora $T_{max}(u_0) = \infty$,*

$$u(t) \in W \text{ per ogni } t > 0$$

$$e$$

$$\|u(t)\|_\infty \to 0 \text{ per } t \to \infty. \tag{4.21}$$

(ii) *Sia $1 < p \leq p_S$. Se $u_0 \in Z$, allora $T_{max}(u_0) < \infty$.*

Nella dimostrazione del teorema utilizzeremo alcune proprietà di W che riassumiamo nel lemma seguente.

Lemma 4.1. *Sia Ω un dominio limitato e $1 < p \leq p_S$.*

(i) *d definita in* (4.18) *è tale che:*

$$d = \frac{p-1}{2(p+1)}\mathcal{C}_p^{\frac{2(p+1)}{p-1}}, \tag{4.22}$$

è di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$ e si verifica facilmente che $E'(0) = 0$, dunque è possibile definire la *varietà di Nehari* associata al funzionale E. Tale insieme coincide con quello definito in (4.19), infatti $\langle E'(u), u\rangle = 0$ se e solo se $I(u) = 0$, per $u \in H_0^1(\Omega)$.
Per la definizione di *varietà di Nehari* ed alcune applicazioni legate ad essa si rimanda a M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

in cui $\mathcal{C}_p$ è la costante definita in (4.20). *Inoltre, se $p < p_S$ allora l'estremo inferiore in* (4.18) *è un minimo.*

(ii) *Per ogni $\epsilon > 0$, si ha che*

$$d_\epsilon := \inf\{E(u) : u \in H_0^1(\Omega),\, I(u) = -\epsilon\} \geq d - \frac{\epsilon}{p+1}. \tag{4.23}$$

(iii) *Per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, si ha che*

$$\|\nabla u\|_2 < \sqrt{2d} \Rightarrow u \in W \Rightarrow \|\nabla u\|_2 < \sqrt{\frac{2(p+1)}{p-1}\,d}. \tag{4.24}$$

Dimostrazione (Lemma 4.1). Dimostriamo (i). Poniamo $\mathcal{D} := \frac{p-1}{2(p+1)}\mathcal{C}_p^{\frac{2(p+1)}{p-1}}$ e fissiamo $\epsilon \geq 0$. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $I(u) = -\epsilon$, e supponiamo $u \not\equiv 0$ se $\epsilon = 0$. $E(u)$ avrà, allora, l'espressione seguente:

$$E(u) = \frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{\epsilon}{p+1}, \tag{4.25}$$

inoltre

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx \leq \mathcal{C}_p^{-(p+1)}\Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{p+1}{2}}, \tag{4.26}$$

in cui la prima maggiorazione deriva dal fatto che $I(u) = -\epsilon \leq 0$, mentre la seconda discende direttamente dalla definizione (4.20) di $\mathcal{C}_p$, essendo $u \not\equiv 0$. Dalla (4.26) segue che

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \mathcal{C}_p^{\frac{2(p+1)}{p-1}}. \tag{4.27}$$

Dunque tenendo conto dell'espressione (4.25) per $E(u)$ e della (4.27) abbiamo che

$$E(u) \geq \frac{p-1}{2(p+1)}\mathcal{C}_p^{\frac{2(p+1)}{p-1}} - \frac{\epsilon}{p+1} = \mathcal{D} - \frac{\epsilon}{p+1},$$

da cui, passando all'estremo inferiore sull'insieme $\{u \in H_0^1(\Omega),\, I(u) = -\epsilon\}$ otteniamo

$$d_\epsilon \geq \mathcal{D} - \frac{\epsilon}{p+1}, \qquad \text{se } \epsilon > 0, \tag{4.28}$$

$$d \geq \mathcal{D}, \qquad \text{se } \epsilon = 0. \tag{4.29}$$

sia ora $\{u_j\}$ una successione minimizzante per la (4.20), cioè tale che

$$\frac{\|\nabla u_j\|_2}{\|u_j\|_{p+1}} \to \mathcal{C}_p, \qquad \text{per } j \to \infty.$$

Moltiplicando u_j per una costante opportuna $\mu_j > 0$, possiamo supporre $I(u_j) = 0$. In questo modo abbiamo che:

$$\int_\Omega |\nabla u_j(x)|^2 dx = \int_\Omega |u_j(x)|^{p+1} dx = (\mathcal{C}_p + \eta_j)^{-(p+1)} \Big(\int_\Omega |\nabla u_j(x)|^2 dx \Big)^{\frac{(p+1)}{2}},$$

in cui $\eta_j \to 0^+$ per $j \to \infty$. Dalla precedente uguaglianza si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla u_j(x)|^2 dx = (\mathcal{C}_p + \eta_j)^{\frac{2(p+1)}{p-1}}. \tag{4.30}$$

Sostituendo la (4.30) in (4.25), per $\epsilon = 0$ si ha

$$E(u_j) = \frac{p-1}{2(p+1)} (\mathcal{C}_p + \eta_j)^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \to \mathcal{D}, \qquad \text{per } j \to \infty,$$

e quindi $\mathcal{D} \geq d$. Allora dalla (4.29) segue che $d = \mathcal{D}$, ossia vale la (4.22). Se $p < p_S$ l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ è compatta, e dunque poiché dalla (4.30) abbiamo che $\{u_j\}$ è una successione limitata in $H_0^1(\Omega)$ segue che, a meno di estrarre una sottosuccessione, deve esistere una funzione $v \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u_j \to v$, per $j \to \infty$. In corrispondenza di v si ha che $E(v) = d$.

Dalla (4.28) segue direttamente (ii), avendo provato che $d = \mathcal{D}$.

Verifichiamo, infine, l'affermazione (iii).
Se supponiamo $0 < \|\nabla u\|_2 < \sqrt{2d}$ allora, dalla definizione di $E(u)$, segue

$E(u) < d$, inoltre risulta

$$\int_\Omega |u(x)|^{p+1}dx \le \mathcal{C}_p^{-(p+1)}\Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{p+1}{2}} < \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx, \quad (4.31)$$

in cui la prima maggiorazione discende dalla definizione (4.20), mentre la seconda deriva dal fatto che $\|\nabla u\|_2 < \sqrt{2d} < \mathcal{C}_p^{\frac{p+1}{p-1}}$ e dunque $\mathcal{C}_p^{-(p+1)} < \Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{-\frac{p-1}{2}}$. Dalla (4.31) si ha che $I(u) > 0$ possiamo così concludere che $u \in W$.
Proviamo la seconda implicazione della (iii). Per ogni $u \in W$, con $u \not\equiv 0$, si ha

$$\frac{p-1}{2(p+1)} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx < E(u) < d, \quad (4.32)$$

in cui la prima maggiorazione si ottiene con un facile calcolo tenendo presente che, se $u \in W$, $I(u) \ge 0$ ($I(u) > 0$ se $u \not\equiv 0$) e la seconda si ha in quanto $u \in W$. Dalla (4.32) segue direttamente l'implicazione di destra in (4.24). □

Dimostrazione (Teorema 4.4). Le ipotesi del teorema sono tali da garantire che anche in questo caso valga la (3.27). Infatti, nonostante stiamo supponendo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, per l'immersione di Sobolev, abbiamo che $u_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ e $p+1 > q_c$ (in quanto $p > p_S$). Ciò è sufficiente per affermare che $u \in C([0,T), H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$ e che $u \in C((0,T), H^2(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$ (per maggiori dettagli si veda l'esempio 51.28 di [14]). Dunque possiamo applicare il Lemma 3.2, dal quale segue che

$$E(u)(t) \le E(u_0) < d, \qquad t \in [0, T_{max}(u_0)). \quad (4.33)$$

Iniziamo dimostrando (i). Se esiste un tempo $t \ge 0$ tale che $u(x,t) = 0$, per ogni $x \in \Omega$, dall'unicità della soluzione si ha $u(x,s) = 0$ per ogni $s \ge t$, essendo la funzione nulla soluzione dell'equazione in (4.17), e quindi la (i) risulta verificata. Assumiamo allora $u(\cdot,t) \not\equiv 0$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$. Dalla (4.33) e dalla (4.18) segue che deve essere $I(u)(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$, dunque, essendo $I(u_0) > 0$ si ha che $I(u)(t) > 0$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$. Da ciò segue che $u(\cdot,t) \in W$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$.

Dal punto (iii) del Lemma 4.1 possiamo dedurre che $u(\cdot, t)$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$ e quindi è limitata anche in $L^{p+1}(\Omega)$. Inoltre, poiché p è tale che $p + 1 > q_c$, siamo nelle ipotesi per poter applicare il punto 3 della Proposizione 3.1 il quale ci dice che dalla limitatezza della norma della soluzione in $L^{p+1}(\Omega)$ segue $T_{max}(u_0) = \infty$.
Resta da provare la (4.21). Con un ragionamento analogo a quello dell'Osservazione 4.1 (nell'esempio 51.38 di [14] si dimostra, sotto ipotesi come le nostre, che l'insieme $\{u(\cdot, t), t > 0\}$ è relativamente compatto in $H_0^1(\Omega)$ da cui si può applicare la Proposizione 4.4), abbiamo che nella topologia di $H_0^1(\Omega)$ l'insieme $\omega(u_0)$ è non vuoto e costituito da equilibri classici del problema. Tuttavia, se v è un equilibrio non banale di (4.17) si ha che $I(v) = 0$ e $E(v) \geq d$ per definizione di d. Ma, per ogni u soluzione di (4.17), si ha che $E(u) < d$ (si veda (4.33)) e dunque si ha un assurdo, per cui $v \notin \omega(u_0)$. L'insieme $\omega(u_0)$ è allora costituito dalla sola funzione nulla e dunque $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{1,2} = 0$ da cui $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{p+1} = 0$. Applicando la stima (2.5) si ha la (4.21).

Per dimostrare (ii) fissiamo $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < \min(-I(u_0), d - E(u_0))$, allora utilizzando la (4.33) e la (4.23) si ha

$$E(u)(t) \leq E(u_0) < d - \epsilon < d - \frac{\epsilon}{p+1} \leq d_\epsilon, \quad \text{per ogni } t \in [0, T_{max}(u_0)),$$

da cui $E(u)(t) < d_\epsilon$. Se fosse $I(u)(t) = -\epsilon$ per qualche $t \in [0, T_{max}(u_0))$ si avrebbe una contraddizione con la definizione di d_ϵ, dunque deve essere $I(u)(t) \neq -\epsilon$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$. Essendo $I(u_0) < -\epsilon$, segue che $I(u)(t) < -\epsilon$ per ogni $t \in [0, T_{max}(u_0))$. Allora, come in (3.28), si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)dx &= \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx \\
&= \int_\Omega u(x,t)\triangle u(x,t)dx + \int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx \\
&= -I(u)(t) > \epsilon. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Dalla (3.37) sappiamo che $T_{max}(u_0) = \infty$ implica che $\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_2 < \infty$, ciò è in contraddizione con la (4.34), cioè con $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)dx > \epsilon$. Dunque u non può essere definita globalmente, cioè deve essere $T_{max}(u_0) < \infty$. $\square$

Osservazione 4.3. Notiamo che in un certo senso vale anche il viceversa del Teorema 4.4. Valgono, infatti, i seguenti risultati.

(i) Se $1 < p \leq p_S$ e u è soluzione globale di (4.17) ed è tale che

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{1,2} = 0, \tag{4.35}$$

allora $u(\cdot,t) \in W$ per t sufficientemente grande.

(ii) Se $1 < p < p_S$, ed u è una soluzione che ammette *blow-up* ad un tempo $T_{max}(u_0) < \infty$, allora $u(\cdot,t) \in Z$ per t sufficientemente vicino a $T_{max}(u_0)$.

Motiviamo brevemente quanto appena affermato. Per (i) la dimostrazione è dovuta a R. Ikehata e T. Suzuki in [7]. Si può dimostrare che l'insieme W, nella topologia di $H_0^1(\Omega)$, è un intorno limitato di 0 (J.L. Lions[(7)] dimostra questo risultato nello studio di un problema iperbolico), dunque, dalla (4.35) si ha che prendendo t sufficientemente grande $u(\cdot,t) \in W$. Per (ii) bisogna notare che, come dimostrato da Y. Giga[(8)], nel caso $p < p_S$, se la soluzione u di (4.17) è tale che $T_{max}(u_0) < \infty$, allora $E(u)(t) \to -\infty$ per $t \to T_{max}(u_0)$. Poiché, inoltre, $I(u) \leq 2E(u)$ per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, si ha che $u(\cdot,t) \in Z$ per t sufficientemente vicino a $T_{max}(u_0)$.

[(7)] Si veda *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Parigi, 1969.

[(8)] Si veda *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Communications in Mathematical Physics, Vol.103 (1986), pag.415-421.

4.3 Proprietà di insiemi di dati iniziali

Considerando un problema del tipo (4.8), analizziamo la struttura dei dati iniziali in corrispondenza dei quali si hanno soluzioni globali con caratteristiche differenti. Ci restringiamo al caso in cui Ω sia un dominio limitato e supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$, un dominio di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$.

Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}
\mathscr{G} &:= \{u_0 \in L^\infty(\Omega) : \ T_{max}(u_0) = \infty\},\\
\mathscr{B} &:= \{u_0 \in L^\infty(\Omega) : \ T_{max}(u_0) = \infty \text{ e } \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_\infty < \infty\},\\
\mathscr{D} &:= \{u_0 \in L^\infty(\Omega) : \ T_{max}(u_0) = \infty \text{ e } \|u(t)\|_\infty \xrightarrow{t\to\infty} 0\}.
\end{aligned}$$

L'insieme $\mathscr{D}$ è detto *dominio di attrazione* di 0. È interessante studiare la struttura di questi insiemi nel caso in cui il problema (4.8) ammetta sia soluzioni globali che non globali. Chiaramente si ha che $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{G}$.

Per descrivere le proprietà degli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ sono necessari alcuni risultati riguardanti le soluzioni stazionarie di (4.8), ossia le soluzioni classiche del seguente problema:

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(u(x)) & \text{in } \Omega,\\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.36}$$

in cui f è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Proposizione 4.6. *Sia Ω un dominio limitato e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Siano u, $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ rispettivamente una sotto-soluzione ed una sopra-soluzione di* (4.36)*, ossia tali che:*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) \leq f(u(x)) & \text{in } \Omega,\\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

$$\begin{cases} -\triangle v(x) \geq f(v(x)) & \text{in } \Omega,\\ v(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.38}$$

Se $v(x) \geq u(x) > 0$ *per ogni* $x \in \Omega$*, allora* $u \equiv v$*.*

Dimostrazione. Moltiplicando la disuguaglianza (4.37) per v, la (4.38) per u ed integrando in Ω abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u(x))v(x)dx &\geq \int_\Omega \big(-\triangle u(x)\big)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot \nabla v(x)dx \\ &= \int_\Omega \big(-\triangle v(x)\big)u(x)dx \geq \int_\Omega f(v(x))u(x)dx,\end{aligned} \tag{4.39}$$

in cui le uguaglianze intermedie si ottengono applicando la formula di Green. Confrontando il primo e l'ultimo termine della (4.39) si ha

$$\int_\Omega f(u(x))v(x)dx \geq \int_\Omega f(v(x))u(x)dx,$$

che, essendo $v \geq u > 0$ in Ω, può essere scritta equivalentemente nel modo seguente

$$\int_\Omega \left(\frac{f(u(x))}{u(x)} - \frac{f(v(x))}{v(x)}\right)u(x)v(x)dx \geq 0. \tag{4.40}$$

Dalla stretta convessità di f segue che l'integrando nella (4.40) è non positivo e negativo nei punti $x \in \Omega$ in cui $v(x) > u(x)$. Ciò è in contraddizione con la (4.40) e quindi $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in \Omega$. □

Da tale proposizione segue che se la f nel problema (4.8) è una funzione strettamente convessa non possono esistere due soluzioni stazionarie u e v tali che $u < v$ in Ω. Notiamo, però, che questo risultato non vale in generale. Ad esempio, se $\Omega = \mathbb{R}^N$ possono esistere soluzioni ordinate di un problema del tipo (4.36) (per questo risultato si veda [14], Teorema 9.1).

Presentiamo un teorema, dovuto a P.L. Lions, in cui sono descritte alcune proprietà geometriche e topologiche degli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$. L'analisi è svolta considerando la topologia di $L^\infty(\Omega)$. Riportiamo la dimostrazione

dell'autore[(9)] eccetto per il punto (iv) per la dimostrazione del quale rimandiamo a [14].
Richiamiamo preliminarmente la seguente definizione.

Definizione 4.3. *Sia K un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale, un punto $x \in K$ è detto* punto estremale *se esso non può essere espresso nella forma $x = \theta y + (1-\theta)z$, con y, $z \in K$ e $\theta \in (0,1)$.*

Teorema 4.5. *Dato il problema (4.8) con Ω limitato, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$, si hanno i seguenti risultati.*

(i) *$\mathscr{D}$ è un intorno aperto di zero.*

(ii) *Se f è convessa, allora gli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ sono convessi.*

Supponiamo, inoltre, che f sia strettamente convessa.

(iii) *Se w_0 non è un punto estremale di $\mathscr{B}$ (rispettivamente $\mathscr{G}$), allora w_0 è un punto interno. Inoltre, se $w_0 \geq 0$, w_0 risulta un punto interno a $\mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$) anche se esiste $v_0 \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$), $v_0 \not\equiv w_0$, tale che $0 \leq w_0 \leq v_0$.*

(iv) *$int(\mathscr{B}) = \mathscr{D}$.*

Dimostrazione. (i) deriva direttamente dal Teorema 4.1 e dalla dipendenza continua rispetto al dato iniziale delle soluzioni.

Per provare (ii) consideriamo u_0, $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ e sia $w_0 = \theta u_0 + (1-\theta)v_0$, con $\theta \in (0,1)$. Chiaramente anche $w_0 \in L^\infty(\Omega)$. Denotiamo con u, v e w le soluzioni di (4.8) con dato iniziale u_0, v_0 e w_0 rispettivamente e definiamo la seguente funzione, combinazione convessa di u e v, $\overline{w} := \theta u + (1-\theta)v$.
Dalla convessità di f si ha

$$\begin{aligned}\overline{w}_t(x,t) - \triangle\overline{w}(x,t) &= \theta f(u(x,t)) + (1-\theta)f(v(x,t)) \\ &\geq f(\theta u(x,t) + (1-\theta)v(x,t)) = f(\overline{w}(x,t)),\end{aligned} \tag{4.41}$$

[(9)]Si veda *Asymptotic behavior of some nonlinear heat equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol.5 (1982), pag.293-306.

per ogni $x \in \Omega$ e $t \in (0, \min(T_{max}(u_0), T_{max}(v_0)))$. Dunque

$$\overline{w}_t(x,t) - \triangle\overline{w}(x,t) - f(\overline{w}(x,t)) \geq 0 = w_t(x,t) - \triangle w(x,t) - f(w(x,t)), \tag{4.42}$$

per il principio di confronto (Proposizione B.2 in Appendice) si ha che

$$w \leq \overline{w} = \theta u + (1-\theta)v. \tag{4.43}$$

Possiamo, inoltre, minorare w nel modo seguente:

$$w \geq e^{t\triangle} w_0 \geq -Ce^{-\lambda_\Omega^{(1)} t}, \tag{4.44}$$

in cui $e^{t\triangle}w_0$ rappresenta la soluzione del problema omogeneo associato a (4.8) con dato iniziale w_0. La prima minorazione discende dal principio di massimo (Proposizione B.1 in Appendice) se si nota che dalle ipotesi su f segue che $f(s) \geq 0$, per ogni $s \in \mathbb{R}$; la seconda minorazione discende dalla proprietà di decadimento del semigruppo del calore (si veda la Proposizione C.4 in Appendice). Dalla (4.43) e dalla (4.44) segue che se u_0 e $v_0 \in \mathscr{G}$ (rispettivamente $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$) anche $w_0 \in \mathscr{G}$ ($\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$).

Dimostriamo (iii). Per ipotesi w_0 non è un punto estremale di $\mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$), dunque esistono u_0, $v_0 \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$) con $u_0 \not\equiv v_0$ e $\theta \in (0,1)$ tali che $w_0 = \theta u_0 + (1-\theta)v_0$. Utilizziamo la stessa notazione introdotta per dimostrare (ii). Poiché f è strettamente convessa abbiamo che $\theta f(u_0) + (1-\theta)f(v_0) \not\equiv f(w_0)$ e per continuità $\theta f(u(\cdot,t)) + (1-\theta)f(v(\cdot,t)) \not\equiv f(\overline{w}(\cdot,t))$ per $t \in [0,\tau]$ con $\tau > 0$ sufficientemente piccolo. Quindi $w(x,t) \leq \overline{w}(x,t)$ per la (4.42) e $w(x,t) \not\equiv \overline{w}(x,t)$ per $t \in (0,\tau]$. Possiamo, dunque, applicare il principio di massimo forte ed il Lemma di Hopf (Proposizione B.3 in Appendice), dai quali abbiamo:

$$w(x,\tau) < \overline{w}(x,\tau), \qquad \text{per } x \in \Omega, \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x,\tau) > \frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu}(x,\tau), \qquad \text{per } x \in \partial\Omega. \tag{4.46}$$

Si può dimostrare (si veda [14] Osservazione 51.11) che, per $\tau > 0$ piccolo, l'applicazione $\widetilde{u}_0 \in L^\infty(\Omega) \to \widetilde{u}(\cdot,\tau) \in C^1(\overline{\Omega})$, in cui denotiamo con $\widetilde{u}(\cdot,t)$ la soluzione di (4.8) con dato iniziale $\widetilde{u}_0$ al tempo t, è ben definita e continua in un intorno di w_0: $\|w(\cdot,\tau)-\widetilde{u}(\cdot,\tau)\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ può essere resa piccola quanto si vuole, a patto di scegliere $\widetilde{u}_0 \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\|w_0-\widetilde{u}_0\|_\infty$ sia sufficientemente piccola e si ha $T_{max}(\widetilde{u}_0) > \tau$. Dalle (4.45) e (4.46) si ottiene

$$\widetilde{u}(x,\tau) \le \overline{w}(x,\tau) \qquad \text{per } x \in \Omega. \tag{4.47}$$

Per confronto (Proposizione B.2 in Appendice), considerando il problema (4.8) con tempo iniziale τ, si ha

$$\widetilde{u}(x,t) \le \overline{w}(x,t), \qquad \text{per } x \in \Omega,\ t \ge \tau. \tag{4.48}$$

Sottolineiamo che $\overline{w}$ è globale in quanto combinazione convessa di soluzioni globali, $\widetilde{u}$ risulta soluzione globale per la (4.48) e perché, come in (4.44), si ha:

$$\widetilde{u}(x,t) \ge e^{t\triangle}\widetilde{u}_0(x), \tag{4.49}$$

in cui $e^{t\triangle}\widetilde{u}_0$ è definita globalmente e in $L^\infty(\Omega)$ per ogni t. Dalla (4.48) e dalla (4.49) si ha che $\widetilde{u}_0 \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$) e dunque w_0 è un punto interno all'insieme $\mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$).

Per provare la seconda affermazione di (iii), scriviamo w_0 come $w_0 = \theta v_0 + (1-\theta)\widetilde{v}_0$, con $\widetilde{v}_0 := (1-\theta)^{-1}(w_0-\theta v_0) \not\equiv v_0$. Allora si ha: $v_0 \ge \widetilde{v}_0 \ge -(1-\theta)^{-1}\theta v_0$. Dunque, se $v_0 \in \mathscr{B}$ (rispettivamente $\mathscr{G}$), prendendo θ sufficientemente piccolo per il Teorema 4.1 sappiamo che $-(1-\theta)^{-1}\theta v_0 \in \mathscr{D}$, e quindi per confronto $\widetilde{v}_0 \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$), da cui segue $w_0 \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{G}$).

Per il punto (iv) iniziamo provando che $int(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{D}$. Sia $u_0 \in int(\mathscr{B})$, allora esiste un intorno U di u_0 tale che $U \subset \mathscr{B}$. Nella topologia di $L^\infty(\Omega)$ in ogni intorno di u_0 possiamo trovare una funzione v_0 tale che $v_0 \ge u_0$ ($v_0 \le u_0$) e $v_0 \not\equiv u_0$, ad esempio sommando (sottraendo) a u_0 una costante sufficientemente piccola. Dunque possiamo scegliere $v_0 \in U \subset \mathscr{B}$ in modo tale che $u_0 \le v_0$ e $u_0 \not\equiv v_0$. Denotiamo con u e v le soluzioni del problema (4.8) con dati iniziali u_0 e v_0 rispettivamente. Fissato un dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tale che $T_{max}(u_0) = \infty$ e $\sup_{t\ge 0}\|u(t)\|_\infty < \infty$, per l'Osservazione

4.1, si ha che l'insieme $\{u(\cdot,t) : t \geq 1\}$ è relativamente compatto in $X = H^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$. L'insieme $\omega(u_0)$ nella topologia di X è, anche in questo caso, non vuoto e costituito da equilibri. Sia $z \in \omega(u_0)$, per definizione esiste una successione $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, tale che $u(\cdot, t_k) \xrightarrow{k\to\infty} z$ in X. Per v_0 valgono le stesse proprietà, dunque, l'insieme $\{v(\cdot,t) : t \geq 1\}$ è relativamente compatto in X, ed esiste $\widetilde{z} \in \omega(v_0)$ ed una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ tale che $v(\cdot, t_{k_j}) \xrightarrow{j\to\infty} \widetilde{z}$ in X. Dal Lemma 3.3 abbiamo che esistono $t_0 > 0$ e $\alpha > 1$ tali che $v(x,t) \geq \alpha u(x,t)$ per $t \geq t_0$ e $x \in \Omega$, da cui si ottiene

$$\widetilde{z}(x) \geq \alpha z(x) \quad \text{per } x \in \Omega. \tag{4.50}$$

Dalle ipotesi su f segue che $f(s) \geq 0$ per ogni s e dunque, per il principio di massimo (pag.9) applicato alla funzione z, si ha che $z(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$. Poiché z e $\widetilde{z}$ sono soluzioni stazionarie di (4.8) deve essere $z \equiv 0$ perché se così non fosse la (4.50) porterebbe ad una contraddizione con quanto affermato nella Proposizione 4.6. Dunque $u(\cdot,t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ in X e quindi $u_0 \in \mathscr{D}$. Ossia $int(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{D}$. Per provare l'inclusione inversa basta notare che banalmente si ha $\mathscr{D} \subset \mathscr{B}$ e che $\mathscr{D}$ è un insieme aperto, dunque deve essere $\mathscr{D} \subseteq int(\mathscr{B})$. $\square$

Consideriamo il problema (4.8) con f verificante le condizioni del teorema precedente e con dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Supponiamo che, in corrispondenza di questo dato iniziale, il problema abbia una soluzione u globale e uniformemente limitata, cioè $u_0 \in \mathscr{B}$. Il punto (iv) del precedente teorema ci dice che l'unica possibilità affinché l'insieme ω-limite di u sia costituito da equilibri non nulli è che u_0 sia un punto sulla frontiera di $\mathscr{B}$.

Se supponiamo che f, oltre alle ipotesi del Teorema 4.5, soddisfi anche la seguente condizione:

$$\int_a^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty, \qquad \text{con } a > 0,$$

allora si ha che se il dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ è tale che $u_0 \geq v$ e $u_0 \not\equiv v$, con v soluzione stazionaria del problema (4.8), allora $T_{max}(u_0) < \infty$ e dunque $u_0 \notin \mathscr{B}$. Questo risultato deriva da una generalizzazione del Teorema 3.4 ad un problema del tipo (4.8) con f verificante le ipotesi descritte sopra (la

dimostrazione è analoga a quella del Teorema 3.4, per maggiori dettagli si veda [14] Teorema 17.3).
Il Teorema 3.4 può essere, inoltre, generalizzato attraverso la proposizione seguente:

Proposizione 4.7. *Consideriamo il problema* (4.8) *in cui poniamo* $f(u) = |u|^p$ *con* $p > 1$ *e* Ω *limitato. Se il dato iniziale* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *è tale che* $u_0 \geq v_0$ *e* $u_0 \not\equiv v_0$*, con* $v_0 \in \mathscr{B} \backslash \mathscr{D}$*, allora* $T_{max}(u_0) < \infty$.

Dimostrazione. Siano u e v soluzioni di (4.17) con dati iniziali u_0 e v_0 rispettivamente. Supponiamo che u sia globale. Per il Lemma 3.3 sappiamo che esistono $\alpha > 1$ e $\tau > 0$ tali che $u(x,t) \geq \alpha v(x,t)$ per ogni $t > \tau$.
Dall'Osservazione 4.1 abbiamo che l'insieme $\omega(v_0)$ è non vuoto e costituito da equilibri. In questo caso, essendo $v_0 \notin \mathscr{D}$, dovrà esistere $z \in \omega(v_0)$ con $z \not\equiv 0$. Sia $\{t_k\}$ una successione tale che $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ e tale che $v(\cdot, t_k) \xrightarrow{k\to\infty} z$ in $C^1(\overline{\Omega})$. Per ogni $t \geq 0$, $v(x,t) \geq e^{t\triangle} v_0(x)$ per il principio di massimo. Calcolando l'espressione precedente in t_k e passando al limite per $k \to \infty$ si ottiene $z(x) \geq 0$ con $x \in \Omega$, da cui per il Lemma di Hopf (pag.9) si ha $\frac{\partial z}{\partial \nu}(x) < 0$ per $x \in \partial\Omega$, da cui abbiamo $z(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$. Essendo $\alpha^{-1} z(x) < z(x)$, avremo che, scegliendo k sufficientemente grande, $v(x, t_k) > \alpha^{-1} z(x)$, da cui $u(x, t_k) \geq \alpha v(x, t_k) > z(x)$, per $x \in \Omega$. Ma, avendo supposto u globale, la disuguaglianza $u(x, t_k) > z(x)$ è in contraddizione con quanto affermato nel Teorema 3.4. □

Ulteriori proprietà degli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$. A partire dagli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$, limitandoci a considerare solo soluzioni positive, possiamo definire l'insieme $\mathscr{G}^+ := \{u_0 \in \mathscr{G} : u_0 \geq 0\}$ ed in modo analogo gli insiemi $\mathscr{B}^+$ e $\mathscr{D}^+$.

Consideriamo il problema (4.17). L'insieme $\mathscr{D}^+$ risulta essere non limitato: dal Teorema 4.3 sappiamo che 0 è una soluzione (esponenzialmente) asintoticamente stabile per il problema in $L^q(\Omega)$, con $q \geq q_c$ (q_c definito nella (4.9)), dunque, se scegliamo $0 \leq u_0 \in L^q(\Omega) \backslash L^\infty(\Omega)$, con $q \geq q_c$, tale che $\|u_0\|_q$ sia sufficientemente piccola troviamo una soluzione u tale che $\|u(t)\|_\infty \to 0$ per $t \to \infty$, ma tale che $\|u(t)\|_\infty \to \infty$ per $t \to 0^+$.
Per $p < p_S$ (p_S definito nella (4.10)), come dimostrato nel Paragrafo 1.2.1,

sappiamo che esiste $u > 0$ soluzione classica di (1.12) e dunque soluzione stazionaria di (4.17). Da ciò segue che $\mathscr{B}^+ \neq \mathscr{D}^+$.

Per ulteriori proprietà relative agli insiemi $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ si rinvia a [14].

Capitolo 5

Un fenomeno di esplosione per un problema parabolico semilineare con dato iniziale di segno variabile

Richiamiamo il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

in cui supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, limitato e di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$, $1 < p < p_S = \frac{N+2}{N-2}$ (secondo la notazione introdotta in (4.10)).

Per quanto visto finora, sappiamo che il problema è ben posto in $C_0(\Omega)$ se denotiamo con $C_0(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ che si annullano sulla frontiera[(1)]. In analogia con la notazione utilizzata nel capitolo precedente, definiamo il seguente insieme:

$$\mathscr{G}_0 := \{u_0 \in C_0(\Omega) : T_{max}(u_0) = \infty\}.$$

L'insieme $\mathscr{G}_0$ è un sottoinsieme chiuso di $C_0(\Omega)$ e contiene un intorno di zero. Il primo fatto discende dai risultati di dipendenza continua, mentre il

[(1)]La definizione formale di $C_0(\Omega)$ è riportata a pag.1.

secondo è una ovvia conseguenza del Teorema 4.1.

Consideriamo un problema del tipo (4.8) in cui supponiamo che f sia una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ convessa e tale che $f(0) = f'(0) = 0$, allora l'insieme $\mathscr{G}_0$ è un insieme convesso. Ciò è conseguenza diretta del fatto che sotto tali ipotesi, come dimostrato nel punto (ii) del Teorema 4.5, l'insieme $\mathscr{G}$, definito all'inizio della Sezione 4.3, è un insieme convesso.
Per il problema (5.1) abbiamo che l'applicazione $u \to |u|^{p-1}u$ soddisfa le condizioni appena enunciate se $u \geq 0$ ma, in generale, non soddisfa la condizione di convessità. Dunque, se chiamiamo $\mathscr{G}_0^+$ l'insieme delle funzioni $u_0 \in \mathscr{G}_0$ non negative, tale insieme è convesso. In questo capitolo presentiamo un teorema che ci mostra come, al contrario, l'insieme $\mathscr{G}_0$ non è convesso e neppure stellato intorno all'origine.

Richiamiamo il problema stazionario relativo a (5.1)

$$\begin{cases} -\triangle\phi(x) = |\phi(x)|^{p-1}\phi(x) & \text{in } \Omega, \\ \phi(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Vogliamo studiare il comportamento delle soluzioni di (5.1) se si sceglie come dato iniziale la funzione $u_0 = \theta\phi$, con $\theta > 0$ e $\phi \in C_0(\Omega)$ soluzione di (5.2).

Se $\phi > 0$ si ha che per $0 < \theta \leq 1$ la soluzione è globale. Infatti, si ha che $-\phi < u_0 \leq \phi$, e dunque per confronto la soluzione si trova, in ogni tempo, fra due soluzioni globali. Se $\phi > 0$ e $\theta > 1$ abbiamo dimostrato, per domini limitati (si veda Teorema 3.4), che la soluzione non è definita globalmente.

Se ϕ è una soluzione di segno variabile, per $\theta \neq 1$, ϕ e $\theta\phi$ non sono confrontabili. Tuttavia possiamo dimostrare che per θ sufficientemente piccolo la soluzione è globale, mentre per θ sufficientemente grande essa esplode ad un tempo finito.
Nel primo caso possiamo applicare il Teorema 4.1, con $f(s) := |s|^{p-1}s$, $s \in \mathbb{R}$, il quale afferma che la soluzione nulla è asintoticamente stabile in $L^\infty(\Omega)$. Sappiamo dunque che esiste una costante $\eta > 0$ tale che se $\theta\|\phi\|_\infty \leq \eta$, allora la soluzione di (5.1) con dato iniziale $u_0 = \theta\phi$ è globale e, inoltre, si ha una stima di tipo esponenziale per la sua norma in $L^\infty(\Omega)$. È chiaro che, essendo

$\phi \in C_0(\Omega)$, $\|\phi\|_\infty < c$ $(c < \infty)$, dunque scegliendo θ opportunamente piccolo è possibile rendere $\theta\|\phi\|_\infty \leq \eta$.

Nel secondo caso, invece, possiamo applicare il Teorema 3.3. Esso afferma che se il dato iniziale $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ è tale che $E(u_0) < 0$ allora la soluzione di (5.1) con dato iniziale u_0 esplode ad un tempo finito. Se $u_0 = \theta\phi$, essendo $\Phi \in C_0(\Omega)$ soluzione classica di (5.2), si ha $\theta\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} E(\theta\phi) &= \frac{\theta^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi(x)|^2 dx - \frac{\theta^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |\phi(x)|^{p+1} dx \\ &= \frac{\theta^2}{2}\int_\Omega -\triangle\phi(x)\phi(x) dx - \frac{\theta^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |\phi(x)|^{p+1} dx \\ &= \frac{\theta^2}{2}\left[1 - \frac{2\theta^{p-1}}{p+1}\right]\int_\Omega |\phi(x)|^{p+1} dx, \end{aligned} \tag{5.3}$$

in cui abbiamo applicato la formula di Green e sfruttato il fatto che ϕ sia soluzione di (5.2). Dalla (5.3) abbiamo che se $\theta > \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ allora $E(\theta\phi) < 0$ e dunque la soluzione di (5.1) con dato iniziale $\theta\phi$ non è definita globalmente.

Riportiamo un teorema, dimostrato da T. Cazenave, F. Dickstein e F.B. Weissler in [4], nel quale si mostra, per $0 < p < p_S$, sufficientemente vicino a p_S e per $\Omega = B_1(0)$, che per $|\theta - 1|$ abbastanza piccolo esiste un tempo t_0 tale che $u(t_0)$ è confrontabile (in senso stretto) con ϕ. È possibile, a questo punto, applicare un risultato (Proposizione 5.2) per il quale si ha che in corrispondenza di un dato iniziale u_0 tale che $u_0 \geq \phi$ oppure $u_0 \leq \phi$, $u_0 \not\equiv \phi$, la soluzione non è globale.

Se non specificato diversamente, consideriamo in quel che segue $\Omega = B_1(0)$ e $1 < p < p_S$.

Teorema 5.1. *Sia $\phi \in C_0(\Omega)$ una soluzione radiale del problema stazionario (5.2) a valori sia positivi che negativi. Esiste $\underline{p}$, con $1 < \underline{p} < p_S$, tale che se $\underline{p} < p < p_S$ esistono $\underline{\theta}$ e $\overline{\theta}$, con $0 < \underline{\theta} < 1 < \overline{\theta}$, tali che per ogni θ, con $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$ e $\theta \neq 1$, la soluzione classica di (5.1) con dato iniziale $u_0(x) = \theta\phi(x)$ esplode ad un tempo finito.*

Premettiamo alcuni risultati che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema.

Proposizione 5.1. *Esiste* $\underline{p}$, *con* $0 < \underline{p} < p_S$, *tale che se* $\underline{p} < p < p_S$ *e se* $\phi \in C_0(\Omega)$ *è una soluzione radiale di* (5.2) *tale che* $\phi(0) > 0$, *allora*

$$\int_\Omega \phi(x)\varphi_{p;\Omega}^{(1)}(x)dx > 0, \tag{5.4}$$

in cui denotiamo con $\varphi_{p;\Omega}^{(1)} > 0$ *l'autofunzione relativa al primo autovalore dell'operatore (autoaggiunto)* $-\triangle - p|\phi|^{p-1}$ *su* $L^2(\Omega)$ *con dominio* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Lemma 5.1. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio limitato di classe* C^2 *e* $V \in C_0(\Omega)$. *Definiamo il seguente operatore autoaggiunto su* $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ &Lu = -\triangle u + Vu, \qquad\qquad u \in D(L). \end{aligned}$$

Denotiamo con $\lambda_L^{(1)}$ *il primo autovalore di* L *e con* $\varphi_L^{(1)} > 0$ *l'autofunzione corrispondente. Sia* $v_0 \in C_0(\Omega)$ *e* $v(x,t) = e^{-tL}v_0(x)$. *Se*

$$a_1 := \int_\Omega v_0(x)\varphi_L^{(1)}(x)dx > 0, \tag{5.5}$$

allora esiste un tempo $\tau > 0$ *tale che* $v(x,t) \geq \frac{a_1}{2}e^{-\lambda_L^{(1)}t}\varphi_L^{(1)}(x)$ *per ogni* $t > \tau$.

Proposizione 5.2. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitato e di classe* $C^{2+\alpha}$, *con* $\alpha \in (0,1)$. *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *tale che* $f(0) = 0$ *e per ogni* $s \in \mathbb{R}$

$$s^2 f'(s) \geq (1+\delta)sf(s), \tag{5.6}$$

$$|f(s)| \leq C(1+|s|^\beta), \tag{5.7}$$

con $1 \leq \beta < p_S$ *e* $\delta > 0$. *Sia* $\psi \in C_0(\Omega)$ *soluzione di*

$$\begin{cases} -\triangle\psi(x) = f(\psi(x)) & \text{in } \Omega, \\ \psi(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.8}$$

Sia $u_0 \in C_0(\Omega)$ e u soluzione di

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = f(u(x,t)) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Se $\psi^+ \not\equiv 0$ e $u_0 \geq \psi$, $u_0 \not\equiv \psi$, allora u ammette blow-up ad un tempo finito. Lo stesso risultato si ha se $\psi^- \not\equiv 0$ e $u_0 \leq \psi$, $u_0 \not\equiv \psi$.

Osserviamo che se $p > 1$ allora $f(s) = |s|^{p-1}s$ soddisfa (5.6) con $\delta = p - 1$ e (5.7) con $C = 1$ e $\beta = p$.

Rinviamo le dimostrazioni dei precedenti risultati e passiamo subito alla dimostrazione del Teorema 5.1.

Dimostrazione (Teorema 5.1*).* Se $\phi \in C_0(\Omega)$ è una soluzione radiale di (5.2), allora $\phi = \phi(|x|) = \phi(r)$ risolve il problema ordinario:

$$\begin{cases} \phi''(r) + \frac{N-1}{r}\phi'(r) + |\phi(r)|^{p-1}\phi(r) = 0 & r \in [0,1), \\ \phi'(0) = \phi(1) = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Consideriamo $\phi \not\equiv 0$. Dall'unicità della soluzione di (5.10) segue che $\phi(0) \neq 0$. Possiamo supporre, senza perdità di generalità, $\phi(0) > 0$. Fissiamo $p \in (\underline{p}, p_S)$, con $\underline{p}$ della Proposizione 5.1.
Sia $\theta > 0$, denotiamo con u^θ la soluzione di (5.1) con dato iniziale $u^\theta(x,0) = \theta\phi(x)$, per $x \in \Omega$, e poniamo

$$(\theta - 1)z^\theta(x,t) = u^\theta(x,t) - \phi(x). \tag{5.11}$$

La funzione z^θ è soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} z_t^\theta = \triangle z^\theta + \frac{1}{\theta-1}\Big[|(1-\theta)z^\theta + \phi|^{p-1}((1-\theta)z^\theta + \phi) - |\phi|^{p-1}\phi\Big] & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ z^\theta(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ z^\theta(x,0) = \phi(x) & x \in \Omega, t = 0. \end{cases}$$

Sia z soluzione di

$$\begin{cases} z_t(x,t) = \triangle z(x,t) + p|\phi(x)|^{p-1}z(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ z(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ z(x,0) = \phi(x) & x \in \Omega, t = 0. \end{cases}$$

Dimostriamo che per ogni $T > 0$ z^θ è ben definita in $[0,T]$ per $|1-\theta|$ sufficientemente piccolo. Poniamo

$$f_\theta(z^\theta) := \frac{1}{\theta - 1}\Big[|(1-\theta)z^\theta + \phi|^{p-1}((1-\theta)z^\theta + \phi) - |\phi|^{p-1}\phi\Big],$$
$$f(z) := p|\phi|^{p-1}z.$$

Abbiamo che $|f_\theta(z^\theta)| \leq C(|1-\theta|(z^\theta)^p + 1)$, con $C > 0$. Sia $y^\theta(t)$ la soluzione dell'equazione ordinaria

$$\begin{cases} y_t^\theta(t) = C(|1-\theta|(y^\theta(t))^p + 1) & t > 0, \\ y^\theta(0) = \|\phi\|_\infty. \end{cases}$$

Dal principio di confronto abbiamo che $z^\theta(t) \leq y^\theta(t)$ per ogni $t \in [0, T_\theta)$, in cui denotiamo con T_θ il tempo di esistenza massimale di y^θ. Si dimostra facilmente che $T_\theta \xrightarrow{\theta\to 1} \infty$. Dunque, fissato $T > 0$ esiste $\widetilde{\theta}$ sufficientemente vicino a 1, tale che $\sup_{t\in[0,T]} |y^\theta(t)| < K$, con $K > 0$, per ogni θ tale che $|1-\theta| < |1-\widetilde{\theta}|$. La funzione y^θ è uniformemente limitata e tale è anche z^θ, infatti, abbiamo che $|z^\theta| \leq y^\theta$ ($z^\theta \geq -y^\theta$ si ottiene con un ragionamento del tutto analogo a quello presentato considerando $-y^\theta$ invece di y^θ). Questo ci assicura che per ogni $T > 0$, se $|1-\theta|$ è sufficientemente piccolo, la funzione z^θ è ben definita in $[0,T]$.
Dai risultati di dipendenza continua (si veda [4]) si ha che per ogni $0 < \delta < T < \infty$,

$$z^\theta \xrightarrow{\theta\to 1} z \qquad \text{in } C([\delta,T], C^1(\overline{\Omega})). \tag{5.12}$$

Denotiamo con $\lambda_{p;\Omega}^{(1)}$ il primo autovalore dell'operatore $-\triangle - p|\phi|^{p-1}$ e con $\varphi_{p;\Omega}^{(1)} > 0$ la corrispondente autofunzione, definiamo $a_1 := \int_\Omega \phi(x)\varphi_{p;\Omega}^{(1)}(x)dx$.

Dalla Proposizione 5.1 abbiamo che vale la (5.4) e dunque possiamo applicare il Lemma 5.1, per il quale abbiamo che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che

$$z(x,t) \geq \frac{a_1}{2} e^{-\lambda^{(1)}_{p;\Omega} t} \varphi^{(1)}_{p;\Omega}(x), \qquad \forall\, t > \tau,\ x \in \Omega.$$

Dunque, fissato $t_0 > \tau$, si ha

$$z(x,t_0) > 0, \tag{5.13}$$

essendo $a_1 > 0$ per la Proposizione 5.1. La (5.11) per $t = t_0$ diventa

$$(\theta - 1) z^\theta(x,t_0) = u^\theta(x,t_0) - \phi(x). \tag{5.14}$$

Per la (5.12) e la (5.13) si avrà che, per θ sufficientemente vicino a 1, anche $z^\theta(x,t_0) > 0$. Dunque dalla (5.14) si ha che esistono $0 < \underline{\theta} < 1 < \overline{\theta}$ tali che

- se $\underline{\theta} < \theta < 1$, allora $u^\theta(x,t_0) < \phi(x)$,
- se $1 < \theta < \overline{\theta}$, allora $u^\theta(x,t_0) > \phi(x)$.

Per la Proposizione 5.2 possiamo concludere che, in entrambi i casi, la soluzione u^θ esplode ad un tempo finito. □

Omettiamo la dimostrazione della Proposizione 5.1, per la quale si rimanda a [4]. Concludiamo con le dimostrazioni degli altri risultati utilizzati.

Dimostrazione (Lemma 5.1*).* Poniamo

$$v(x,t) = e^{-\lambda^{(1)}_L t} [a_1 \varphi^{(1)}_L(x) + w(x,t)]. \tag{5.15}$$

Si ha

$$\begin{aligned} w(x,t) &= e^{-t(L - \lambda^{(1)}_L)} [v_0(x)] - a_1 \varphi^{(1)}_L(x) \\ &= e^{-t(L - \lambda^{(1)}_L)} [v_0(x) - a_1 \varphi^{(1)}_L(x)]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Infatti, poiché $\varphi^{(1)}_L$ è l'autofunzione relativa a $\lambda^{(1)}_L$, primo autovalore di L, essa è anche autofunzione relativa a $e^{-\lambda^{(1)}_L t}$, primo autovalore dell'operatore

e^{-tL}. Da ciò si ottiene $e^{-t(L-\lambda_L^{(1)})}[a_1\varphi_L^{(1)}(x)] = a_1\varphi_L^{(1)}(x)$.
Chiamiamo $\mathbb{R}_{\varphi_L^{(1)}}$ l'autospazio associato al primo autovalore di L e scriviamo $L^2(\Omega) = \mathbb{R}_{\varphi_L^{(1)}} \oplus W$. La funzione $w \in W$ e dalla (5.16) segue che $e^{-t(L-\lambda_L^{(1)})} : W \to W$.
L'operatore $e^{-t(L-\lambda_L^{(1)})}$ gode di una proprietà di decadimento in $L^2(\Omega)$ analoga a quella dell'operatore $-\triangle$ riportata in Appendice (Proposizione C.4); con una dimostrazione simile, infatti, si dimostra che $\|e^{-t(L-\lambda_L^{(1)})}\|_{\mathscr{L}(W)} \leq e^{-t(\lambda_L^{(2)}-\lambda_L^{(1)})}$, in cui denotiamo con $\lambda_L^{(2)}$ il secondo autovalore di L. La funzione w, dunque, decade esponenzialmente in $L^2(\Omega)$, per cui possiamo traslare il tempo in modo da avere $\|w(0)\|_2$ piccola. Inoltre, w è tale che

$$w_t(x,t) - \triangle w(x,t) = -V(x)w(x,t) + \lambda_L^{(1)} w(x,t)$$

e dunque, per i risultati di regolarità parabolica, si ha che $w(t) \in W^{2,2}(\Omega)$, per ogni $t > 0$, e vale la seguente stima $\|w(t)\|_{2,2} \leq C \sup_{s\leq t} \|\widetilde{V}w(s)\|_2$, in cui $\widetilde{V}(x) = -V(x) + \lambda_L^{(1)}$. Dal Teorema di immersione di Sobolev sappiamo che lo spazio $W^{2,2}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^p(\Omega)$ per qualche $p > 2$. Dunque $w(t) \in L^p(\Omega)$ e, applicando di nuovo i risultati di regolarità, otteniamo $w(t) \in W^{2,p}(\Omega)$ con una stima analoga alla precedente. Procediamo in questo modo fino a che $w(t) \in W^{2,p}(\Omega)$ con p tale da avere l'immersione continua $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Dalle stime effettuate ed essendo $w(0) \in W$ otteniamo che $\|w(t)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq Ce^{-t(\lambda_L^{(2)}-\lambda_L^{(1)})}$. Dunque, per $t \to \infty$ la funzione w e le sue derivate prime rispetto allo spazio tendono a zero uniformemente. Dal Lemma di Hopf, applicato all'autofunzione $\varphi_L^{(1)}$, sappiamo che $\partial_\nu \varphi_L^{(1)}(x) > 0$ per $x \in \partial\Omega$. Dunque si ha che per t sufficientemente grande $|w(x,t)| \leq (\frac{a_1}{2})\varphi_L^{(1)}(x)$ per ogni $x \in \Omega$.
Dalla (5.15) si ha

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= e^{-\lambda_L^{(1)}t}[a_1\varphi_L^{(1)}(x) + w(x,t)] \\
&\geq e^{-\lambda_L^{(1)}t}[a_1\varphi_L^{(1)}(x) - \left(\frac{a_1}{2}\right)\varphi_L^{(1)}(x)] \\
&= \left(\frac{a_1}{2}\right)\varphi_L^{(1)}(x)e^{-\lambda_L^{(1)}t}.
\end{aligned}$$

□

Per la Proposizione 5.2 seguiamo la dimostrazione presentata in [4] valida in generale per problemi del tipo (5.9) sotto opportune ipotesi per f. Per la dimostrazione utilizzeremo il seguente lemma la cui dimostrazione è rinviata alla fine del capitolo.

Lemma 5.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e di classe $C^{2+\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e tale che verifichi (5.6) e (5.7) per ogni $s \in \mathbb{R}$. Sia $\psi \in C_0(\Omega)$, $\psi \not\equiv 0$, soluzione di (5.8). Denotiamo con $\lambda_M^{(1)}$ il primo autovalore dell'operatore $M := -\triangle - f'(\psi)$ relativo al problema di Dirichlet in Ω. Allora si ha $\lambda_M^{(1)} < 0$.*
Denotiamo con $\varphi_M^{(1)}$ l'autofunzione corrispondente a $\lambda_M^{(1)}$ tale che $\varphi_M^{(1)} > 0$ e $\|\varphi_M^{(1)}\|_\infty = 1$. Allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che

$$-\triangle(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) \leq f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) \tag{5.17}$$

e

$$-\triangle(\psi - \epsilon\varphi_M^{(1)}) \geq f(\psi - \epsilon\varphi_M^{(1)}), \tag{5.18}$$

per ogni $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Dimostrazione (Proposizione 5.2). Dimostriamo la prima affermazione, la seconda è equivalente ad essa a meno di un cambio di segno.
Supponiamo per assurdo che la funzione u sia globale. Poiché u è soluzione di (5.9) con dato iniziale $u_0 \geq \psi$ e $u_0 \not\equiv \psi$, possiamo applicare il principio di confronto forte (Proposizione B.3 in Appendice) alle funzioni u e ψ, ottenendo $u(x,t) > \psi(x)$, per $x \in \Omega$ e $t > 0$. Sottolineiamo che tale disuguaglianza (stretta) vale, per il Lemma di Hopf, anche per x arbitrariamente vicino a $\partial\Omega$. Scegliendo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ opportunamente piccolo abbiamo che $u(x,t) > \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)$ per $t > 0$ e $x \in \Omega$, utilizzando le notazioni introdotte nel Lemma 5.2. In particolare per $t = 1$ si ha $u(x,1) > \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)$.
Sia v soluzione di (5.9) con dato iniziale $v_0 := \psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}$. Se consideriamo la funzione soluzione di (5.9) con dato iniziale $u(x,1)$, per l'unicità, essa coincide con u, soluzione dello stesso problema con dato iniziale u_0, per ogni tempo $t > 1$. Dunque, essendo $u(x,1) > \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x) = v_0(x)$, possiamo

applicare il principio di confronto (Proposizione B.2 in Appendice) alle funzioni u e v, ottenendo $u \geq v$. Inoltre, essendo $\varphi_M^{(1)}(x) > 0$ in Ω (il Lemma di Hopf, applicato a $\varphi_M^{(1)}$, ci assicura nuovamente che la disuguaglianza vale anche per x arbitrariamente vicino alla frontiera di Ω), si ha $v_0(x) > \psi(x)$ in Ω e dunque, applicando il principio di confronto alle funzioni v e ψ, si ha $v(x,t) \geq \psi(x)$ per $t > 0$ e $x \in \Omega$. Dunque

$$\psi(x) \leq v(x,t) \leq u(x,t+1), \qquad \text{per } t > 0 \text{ e } x \in \Omega,$$

da cui segue che la funzione v è definita globalmente.
Dalla (5.17) abbiamo $-\triangle v_0(x) \leq f(v_0(x))$, da cui si può dimostrare**(2)** che v è crescente come funzione di t. La funzione f verifica (5.6) e dunque anche la seguente disequazione:

$$sf(s) \geq (2+\delta)\int_0^s f(\sigma)d\sigma, \qquad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Poiché la funzione f soddisfa (5.7) e (5.19) e v è definita globalmente allora si ha $\sup_{t\geq 0} \|v(t)\|_\infty < \infty$. Per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a [5] Teorema 8.1.6.
Allora, per quanto visto nell'Osservazione 4.1, sappiamo che esiste una funzione $\psi' \in C_0(\Omega)$, soluzione di (5.8), tale che

$$v(\cdot,t) \nearrow \psi'(\cdot) \qquad \text{in } C_0(\Omega) \text{ per } t \to \infty. \tag{5.20}$$

Dato che $\varphi_M^{(1)}(x) \geq 0$ e $v(x,t)$ è crescente e tende a $\psi'(x)$, si ha

$$\psi(x) \leq \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x) \leq v(x,t) \leq \psi'(x) \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } t > 0, \tag{5.21}$$

---

(2) Per completezza riportiamo il risultato ma omettiamo la dimostrazione per la quale si rinvia a [14] Proposizione 52.19:

Proposizione 5.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio di classe C^2. Consideriamo il problema* (4.8) *con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R})$. Supponiamo che il dato iniziale u_0 sia limitato e tale che $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\Omega)$, $u_0(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ e $\triangle u_0(x) + f(u_0(x)) \geq 0$, per quasi ogni $x \in \Omega$, allora $u_t(x,t) \geq 0$ per $(x,t) \in \Omega \times (0, T_{max}(u_0))$.*

dunque $\psi'(x) \geq \psi(x)$ in Ω, inoltre $\psi^+ \not\equiv 0$ per ipotesi e quindi abbiamo che $\psi' \not\equiv 0$. Possiamo applicare il Lemma 5.2 alla funzione ψ'. Denotiamo l'autofunzione e la costante definite nel Lemma 5.2 relative a ψ' con $\varphi_M'^{(1)}$ e ϵ_0' rispettivamente. Dalla (5.21) si ha $v(x,0) = \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x) \leq \psi'(x)$, per $x \in \Omega$, ed inoltre $v(x,0) \not\equiv \psi'(x)$. Infatti, se per assurdo fosse $v(x,0) \equiv \psi'(x)$ allora avremmo che $v(x,0) = \psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)$ risulterebbe soluzione del problema stazionario (5.8), ossia

$$-\triangle(\psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)) = f(\psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)) \qquad \text{in } \Omega,$$

ma, essendo ψ soluzione di (5.8) e $\varphi_M^{(1)}$ autofunzione dell'operatore M definito nell'enunciato del Lemma 5.2, abbiamo che

$$\begin{aligned}&-\triangle(\psi(x) + \epsilon\varphi_M^{(1)}(x)) = \\ &-\triangle\psi(x) - \epsilon\triangle\varphi_M^{(1)}(x) = f(\psi(x)) + f'(\psi(x))\epsilon\varphi_M^{(1)}(x) + \lambda_M^{(1)}\epsilon\varphi_M^{(1)}(x) \quad \text{in } \Omega.\end{aligned}$$

Dunque dovrebbe essere

$$f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) = f(\psi) + f'(\psi)\epsilon\varphi_M^{(1)} + \epsilon\lambda_M^{(1)}\varphi_M^{(1)}, \tag{5.22}$$

ma dallo sviluppo di Taylor di $f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)})$ si ha

$$f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) = f(\psi) + f'(\psi)\epsilon\varphi_M^{(1)} + o(|\epsilon\varphi_M^{(1)}|).$$

Confrontando il membro di destra dell'espressione precedente con quello di destra della (5.22) si ha una contraddizione. Dunque $v(x,0) \not\equiv \psi'(x)$ e possiamo applicare a v e ψ' il principio di confronto forte ottenendo che $v(x,t) < \psi'(x)$ per $x \in \Omega$ e $t > 0$. In particolare, se poniamo $t = 1$ e scegliamo $0 < \epsilon' \leq \epsilon_0'$ opportunamente piccolo, abbiamo $v(x,1) \leq \psi'(x) - \epsilon'\varphi_M'^{(1)}(x)$. Dalla (5.18) abbiamo che $\psi' - \epsilon'\varphi_M'^{(1)}$ è una sopra-soluzione di (5.8). Essendo $v(x,1) \leq \psi'(x) - \epsilon'\varphi_M'^{(1)}(x)$ possiamo applicare il principio di confronto alle funzioni v e $\psi' - \epsilon'\varphi_M'^{(1)}$ ottenendo $v(x,t) \leq \psi'(x) - \epsilon'\varphi_M'^{(1)}(x)$ per ogni $t > 0$ e $x \in \Omega$. Poiché $\varphi_M'^{(1)}(x) > 0$ in Ω, si ha $v(x,t) < \psi'(x)$ per $t > 0$ e $x \in \Omega$. Ciò è in contraddizione con (5.20) e dunque concludiamo che u non può essere definita globalmente. $\square$

Dimostrazione (Lemma 5.2). Sia

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(\psi(x))u^2(x)dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Dalla formula di Green e dal fatto che ψ soddisfa (5.8) si ha

$$\begin{aligned} J(\psi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \psi(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(\psi(x))\psi^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega -\triangle(\psi(x))\psi(x) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(\psi(x))\psi^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega f(\psi(x))\psi(x) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(\psi(x))\psi^2 dx \\ &\leq -\frac{\delta}{2}\int_\Omega f(\psi(x))\psi(x) dx = -\frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla \psi(x)|^2 dx < 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

in cui abbiamo usato (5.6) per la prima minorazione in (5.23).
Il primo autovalore di $M = -\triangle - f'(\psi)$, $\lambda_M^{(1)}$, ha la seguente caratterizzazione:

$$\lambda_M^{(1)} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_2 = 1}} \{2J(u)\}.$$

Dalla (5.23) si ha $J(\psi) < 0$ e ciò implica che $\lambda_M^{(1)} < 0$. Dunque, per la differenziabilità di f, esiste $\epsilon_0 > 0$, tale che

$$f(\psi + y) \geq f(\psi) + yf'(\psi) + \lambda_M^{(1)}|y|, \tag{5.24}$$
$$f(\psi + y) \leq f(\psi) + yf'(\psi) - \lambda_M^{(1)}|y|, \tag{5.25}$$

per ogni $|y| \leq \epsilon_0$.
Dato $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, essendo $0 < \varphi_M^{(1)} \leq 1$, si ha $0 \leq \epsilon\varphi_M^{(1)} \leq \epsilon_0$ e dunque la (5.24) vale con $y = \epsilon\varphi_M^{(1)}$, cioè

$$f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) \geq f(\psi) + \epsilon\varphi_M^{(1)}[f'(\psi) + \lambda_M^{(1)}]. \tag{5.26}$$

Inoltre, essendo ψ soluzione di (5.8), dalla definizione di $\lambda_M^{(1)}$ e $\varphi_M^{(1)}$ e dalla

(5.26), segue che

$$-\triangle(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}) = f(\psi) + \epsilon\varphi_M^{(1)}[f'(\psi) + \lambda_M^{(1)}] \leq f(\psi + \epsilon\varphi_M^{(1)}).$$

Analogamente si dimostra (5.18). $\square$

Appendice:

Risultati preliminari su problemi parabolici

Appendice A

Teoremi di regolarità

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio arbitrario e $T > 0$. Consideriamo il problema lineare

$$u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = f(x,t), \qquad \text{in } \Omega \times (0,T). \tag{A.1}$$

Definiamo *soluzione forte* di $(A.1)$ una funzione $u \in W^{2,1;1}_{loc}(\Omega \times (0,T))$ che soddisfa $(A.1)$ per quasi ogni $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$.
Sia

$$\mathcal{Q}_T := \Omega \times (0,T);$$
$$\mathcal{S}_T := \partial\Omega \times (0,T);$$
$$\mathcal{P}_T := \big(\partial\Omega \times (0,T)\big) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big).$$

Teorema A.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato.
Sia $u \in W^{2,1;p}_{loc}(\mathcal{Q}_T) \cap L^p(\mathcal{Q}_T)$, con $1 < p < \infty$, una soluzione forte di $(A.1)$, con $f \in L^p(\mathcal{Q}_T)$.*

(i) *Se $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}_T$ e $dist(\mathcal{Q}', \mathcal{P}_T) > 0$, allora*

$$\|u\|_{2,1;p;\mathcal{Q}'} \leq C(\|u\|_{p;\mathcal{Q}_T} + \|f\|_{p;\mathcal{Q}_T}), \tag{A.2}$$

in cui C dipende da N, p, $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{Q}_T$.

(ii) *Sia* Ω *di classe* C^2 *e* Σ *un insieme aperto tale che* $\Sigma \subset \mathcal{S}_T$ *oppure* $\Sigma = \mathcal{P}_T$. *Supponiamo* $u \in W^{2,1;p}(\mathcal{Q}_T)$ *e* $u(x,t) = 0$ *per* $(x,t) \in \Sigma$. *Sia* $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}_T$ *e* $dist(\mathcal{Q}', \mathcal{P}_T \backslash \Sigma) > 0$ *se* $\Sigma \neq \mathcal{P}_T$. *Allora vale* (A.2) *con* C *dipendente anche da* Σ.

(iii) *Sia* Ω *di classe* C^2, $\varphi \in W^{2,1;p}(\mathcal{Q}_T)$ *e* $f \in L^p(\mathcal{Q}_T)$. *Allora esiste un'unica soluzione (forte) di* (A.1) *tale che* $u(x,t) = \varphi(x,t)$ *per* $(x,t) \in \mathcal{P}_T$. *Inoltre* u *soddisfa la stima seguente:*

$$\|u\|_{2,1;p;\mathcal{Q}_T} \leq C(\|f\|_{p;\mathcal{Q}_T} + \|\varphi\|_{2,1;p;\mathcal{Q}_T}).$$

Teorema A.2. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio limitato di classe* $C^{2+\alpha}$, *con* $\alpha \in (0,1)$. *Sia* $f \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathcal{Q}}_T)$, $\varphi \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathcal{Q}}_T)$.

(i) *Se* $u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathcal{Q}}_T)$ *è soluzione di* (A.1) *e* $u(x,t) = \varphi(x,t)$ *per* $(x,t) \in \mathcal{P}_T$, *allora*

$$|u|_{2+\alpha;\mathcal{Q}_T} \leq C(\|u\|_{\infty;\mathcal{Q}_T} + |f|_{\alpha;\mathcal{Q}_T} + |\varphi|_{2+\alpha;\mathcal{Q}_T}),$$

in cui C *dipende da* N, α *e* Ω.

(ii) *Esiste un'unica soluzione* $u \in C(\overline{\mathcal{Q}}_T) \cap C^{2,1}(\mathcal{Q}_T)$ *di* (A.1) *tale che* $u(x,t) = \varphi(x,t)$ *per* $(x,t) \in \mathcal{P}_T$. *Se* $\varphi_t(x,0) - \triangle\varphi(x,0) = f(x,0)$ *per* $x \in \partial\Omega$, *allora* $u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathcal{Q}}_T)$ *e*

$$|u|_{2+\alpha;\mathcal{Q}_T} \leq C(|f|_{\alpha;\mathcal{Q}_T} + |\varphi|_{2+\alpha;\mathcal{Q}_T}).$$

Per la definizione di $|\cdot|_{\cdot;\cdot}$ *si veda* (6).

Per le dimostrazioni dei teoremi e per ulteriori risultati di regolarità si rimanda a [13].

Appendice B

Principi di massimo e di confronto

Per i seguenti risultati si rimanda a [14].

Proposizione B.1 (Principio di massimo)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio arbitrario,* $T > 0$*,* $b : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$*,* $c : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$*, tale che* $\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)} c(x,t) < \infty$.
Sia $w \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ *tale che* $w(x,t) \leq 0$ *per* $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$*,* $w(x,0) \leq 0$ *per* $x \in \overline{\Omega}$*,* $\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)} w(x,t) < \infty$ *e*

$$w_t(x,t) - \triangle w(x,t) \leq b(x,t) \cdot \nabla w(x,t) + c(x,t)w(x,t),$$

per $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$*. Se* Ω *è illimitato, supponiamo inoltre che*

$$\limsup_{\substack{|x|\to\infty \\ (x,t)\in\Omega\times(0,T)}} w(x,t) \leq 0 \qquad \textit{oppure} \qquad |b(x,t)| \leq C_1(1 + |x-a|^{-1}),$$

per qualche $a \in \mathbb{R}^N$ *e* $C_1 > 0$*.*
Allora $w(x,t) \leq 0$ *in* $\Omega \times (0,T)$*.*

Proposizione B.2 (Principio di confronto per soluzioni classiche)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio arbitrario,* $T > 0$ *e* u*,* $v \in C^{2,1}(\Omega\times(0,T))\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T])$*. Supponiamo che* $u(x,t) \leq v(x,t)$ *per* $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$*,* $u(x,0) \leq v(x,0)$

per $x \in \overline{\Omega}$ *e*

$$u_t(x,t) - \triangle u(x,t) - f(x,u,\nabla u) \leq v_t(x,t) - \triangle v(x,t) - f(x,v,\nabla v),$$
$$\text{per } (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

in cui $f = f(x,s,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *è continua rispetto ad* x *e di classe* C^1 *rispetto ad* s *e* ξ.
Supponiamo, inoltre, che u, v, $\nabla v \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$ *e* $|u|$,$|v| \leq C_1$, $|\nabla v| \leq C_2$, $|f_s(x,s,\xi)| + (1+|x|)^{-1}|f_\xi(x,s,\xi)| \leq C_f$ *per ogni* $|s| \leq C_1$, $|\xi| \leq C_2 + 1$.
Allora $u(x,t) \leq v(x,t)$ *in* $\Omega \times (0,T)$.

Proposizione B.3 (Principio di confronto forte e Lemma di Hopf)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio limitato di classe* C^2, $p > N+2$ *e* $T > 0$. *Siano* u, $v \in W^{2,1;p}_{loc}(\overline{\Omega} \times (0,T]) \cap C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$. *Supponiamo che*

$$u_t(x,t) - \triangle u(x,t) - f(x,t,u,\nabla u) \leq v_t(x,t) - \triangle v(x,t) - f(x,t,v,\nabla v),$$
$$\text{per } (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

in cui $f = f(x,t,s,\xi) : \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *è continua rispetto ad* x *e* t, *di classe* C^1 *rispetto ad* s *e* ξ. *Supponiamo, inoltre, che* $u(x,0) \leq v(x,0)$, $u(x,0) \not\equiv v(x,0)$, *per* $x \in \Omega$, *e che valga*

$$u(x,t) \leq v(x,t) \qquad \text{per } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

oppure

$$\partial_\nu u(x,t) + bu(x,t) \leq \partial_\nu v(x,t) + bv(x,t) \tag{B.1}$$
$$\text{per } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \text{ e } b \in C^1(\partial\Omega).$$

Se f *dipende da* ξ, *assumiamo anche* ∇u, $\nabla v \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$.
Allora $u(x,t) < v(x,t)$ *in* $\Omega \times (0,T)$.

Inoltre, se $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$ *per qualche* $x_0 \in \partial\Omega$ *e* $t_0 \in (0,T)$, *allora* $\partial_\nu u(x_0,t_0) > \partial_\nu v(x_0,t_0)$.
Se vale (B.1), allora $u(x,t) < v(x,t)$ *in* $\overline{\Omega} \times (0,T)$.

Appendice C

Semigruppo del calore

C.1 Definizioni preliminari

Dato un operatore A, indicheremo con $D(A)$ il suo dominio.

Definizione C.1. *Siano X e Y due spazi di Banach. Definiamo* operatore lineare non limitato *da X in Y una qualsiasi applicazione lineare $A : D(A) \subset X \to Y$ definita su un sottospazio $D(A) \subset X$ a valori in Y.*
Si dice che A è limitato *se esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\|Au\|_Y \leq c\|u\|_X \qquad \forall\, u \in D(A).$$

Sia A un operatore lineare fra gli spazi di Banach X e Y, A è limitato se e solo se è un operatore continuo ($A : X \to Y$ si dice *continuo* se è continuo come applicazione fra gli spazi topologici X e Y, su cui consideriamo la topologia indotta dalla norma). Indichiamo con $\mathscr{L}(X, Y)$ l'insieme degli operatori lineari e continui da X in Y. Se $Y = X$ utilizzeremo la notazione $\mathscr{L}(X)$.

Definizione C.2. *Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subset X \to Y$ un operatore lineare. Diciamo che A è* chiuso *se ha grafico chiuso, cioè se*

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset X \times Y$$

è un insieme chiuso.

Se A è un operatore chiuso, possiamo dotare D(A) della norma del grafico, vale a dire $\|v\|_{D(A)} = \|v\|_X + \|Av\|_Y$. Con questa norma $D(A)$ è uno spazio di Banach.

Definizione C.3. *Siano X e Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subset X \to Y$ un operatore non limitato e tale che il suo dominio $D(A)$ sia denso in X. Denotiamo rispettivamente con X^* e Y^* i duali degli spazi X e Y. Definiamo un nuovo operatore $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ nel modo seguente:*

$$D(A^*) = \{v \in Y^* : \exists\, c > 0 \text{ tale che } |\langle v, Au\rangle_{Y^*,Y}| \leq c\|u\|_X \;\forall\, u \in D(A)\}$$

utilizzando la notazione: $\langle v, w\rangle_{Y^*,Y} = v(w) \;\forall\, w \in Y$ e $\forall\, v \in Y^*$.
Fissato $v \in D(A^*)$, consideriamo l'applicazione $g : D(A) \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(u) = \langle v, Au\rangle_{Y^*,Y} \qquad\qquad u \in D(A).$$

Si ha che g è un'applicazione lineare e continua e può essere prolungata per continuità in modo unico ad un'applicazione $\overline{g} : X \to \mathbb{R}$. Poniamo $A^*v = \overline{g}$. A^* è lineare ed è detto operatore aggiunto *di A.*
La seguente relazione lega A ed il suo aggiunto:

$$\langle v, Au\rangle_{Y^*,Y} = \langle A^*v, u\rangle_{X^*,X} \qquad\qquad \forall\, u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*).$$

D'ora in poi denotiamo con H uno spazio di Hilbert.

Definizione C.4. *Sia $A : D(A) \subset H \to H$ un operatore lineare non limitato. Si dice che A è* monotono *(o* accrettivo*) se*

$$(Av, v) \geq 0 \qquad\qquad \forall\, v \in D(A),$$

in cui denotiamo con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in H.
Un operatore A si dice massimale monotono *se è monotono e*
$R(I + A) = H$, cioè se è monotono e per ogni $f \in H$ esiste $u \in D(A)$ tale che $u + Au = f$.

Proposizione C.1. *Sia A un operatore massimale monotono. Allora*

- *$D(A)$ è denso in H,*
- *A è chiuso,*
- *per ogni $\lambda \geq 0$, $(I + \lambda A)$ è biiettivo da $D(A)$ in H. $(I + \lambda A)^{-1}$ è un operatore limitato e $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$.*

Se identifichiamo lo spazio H con il suo duale, possiamo considerare A^* come un operatore non limitato in H.

Definizione C.5. *Un operatore A si dice* simmetrico *se*

$$(Au, v) = (u, Av) \qquad \forall\, u, v \in D(A).$$

Si dice che A è autoaggiunto *se $A^* = A$.*

Se $A \in \mathscr{L}(H)$ le definizioni di operatore autoaggiunto e simmetrico coincidono. Ciò non accade nel caso generale di operatori non limitati. Se un operatore non limitato è autoaggiunto allora è simmetrico, mentre non è vero il viceversa. Un operatore A è simmetrico se e solo se $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^* = A$ su $D(A)$, dunque può accadere che $A \neq A^*$.
Tuttavia vale la seguente proposizione.

Proposizione C.2. *Se A è un operatore massimale monotono simmetrico, allora A è autoaggiunto.*

Per la dimostrazione si veda [2] Proposizione VII.6.

Possiamo, ora, enunciare il Teorema di Hille-Yoshida per spazi di Hilbert.

Teorema C.1 (Hille-Yosida)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ un operatore massimale monotono. Allora, per ogni $u_0 \in D(A)$ esiste un'unica funzione $u \in C^1([0, +\infty), H) \cap C([0, +\infty), D(A))$ tale che*

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0 & t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0 & t = 0. \end{cases} \tag{C.1}$$

Inoltre si ha

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad e \quad \|u_t(t)\|_H = \|Au(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H \qquad \forall t \geq 0.$$

Osservazione C.1 (*Regolarità della soluzione*)**.** Definiamo per ricorrenza il seguente spazio:

$$D(A^k) := \{u \in D(A^{k-1}); Au \in D(A^{k-1})\}, \text{ con } k \geq 2 \text{ intero}; \tag{C.2}$$

e poniamo $D(A^k) = H$ per $k = 0$. Si verifica facilmente che $D(A^k)$ è uno spazio di Hilbert se vi definiamo il prodotto scalare

$$(u, v)_{D(A^k)} := \sum_{j=0}^{k} (A^j u, A^j v).$$

Se $u_0 \in D(A^k)$ con $k \geq 2$, allora la soluzione u del problema $(C.1)$ ottenuta nel Teorema C.1 è tale che

$$u \in C^{k-j}([0, \infty), D(A^j)) \qquad \text{per } j = 0, 1, \ldots, k.$$

Per la dimostrazione del Teorema C.1 e dell'Osservazione C.1 si rimanda a [2] Teorema VII.4 e VII.5.

Osservazione C.2. Dato un operatore massimale monotono $A : D(A) \subset H \to H$ e $u_0 \in D(A)$, consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} v_t(t) + Av(t) + bv(t) = 0 & t \in [0, +\infty), \\ v(0) = u_0 & t = 0, \end{cases} \tag{C.3}$$

con $b \in \mathbb{R}$. Esso si riconduce al problema $(C.1)$, ponendo:

$$u(t) = e^{bt} v(t),$$

in cui u è soluzione di $(C.1)$.

Mantenendo le notazioni del Teorema C.1, se fissiamo $t \geq 0$ possiamo definire l'applicazione lineare:

$$\begin{array}{rccc} T_A(t): & D(A) & \longrightarrow & D(A) \\ & u_0 & \longrightarrow & u(t). \end{array}$$

Poiché dal Teorema C.1 abbiamo che $\|T_A(t)u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$, $T_A(t)$ si può prolungare per continuità ad un operatore lineare e continuo da H in sé, che indicheremo ancora con $T_A(t)$. Si verifica facilmente che tale operatore gode delle seguenti proprietà:

(i) per ogni $t \geq 0$, $T_A(t) : H \to H$ è un operatore lineare e continuo e $\|T_A(t)\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$;

(ii) $T_A(t_1 + t_2) = T_A(t_1) \circ T_A(t_2) \qquad \forall\, t_1, t_2 \geq 0$,
$T_A(0) = I$;

(iii) $\lim_{t \to 0^+} \|T_A(t)u_0 - u_0\|_H = 0 \qquad \forall\, u_0 \in H$.

Una famiglia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ di operatori di $\mathscr{L}(H)$ definita per ogni valore del parametro $t \geq 0$ e verificante (i), (ii) e (iii) è un *semigruppo continuo di contrazioni a un parametro*. L'operatore A è detto *generatore infinitesimale* del semigruppo $T_A(t)$.
Si dimostra che, viceversa, dato un semigruppo continuo di contrazioni $T(t)$, esiste un unico operatore A massimale monotono che sia generatore infinitesimale del semigruppo. Si viene così a determinare una corrispondenza biunivoca fra operatori massimali monotoni e semigruppi continui di contrazioni.
Dato un semigruppo continuo di contrazioni $T(t)$ su uno spazio di Hilbert H, si può definire il suo generatore infinitesimale nel modo seguente:

$$D(A) = \left\{ u \in H \text{ tale che } \lim_{t \to 0} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ esiste} \right\},$$
$$Au = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \qquad u \in D(A).$$

Costruendo l'operatore a partire dalla definizione di semigruppo si ottiene il seguente risultato, per il quale si rimanda a [9] Teorema 4.3.2:

Teorema C.2. *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo continuo di contrazioni e sia A il suo generatore infinitesimale. Sia $u_0 \in D(A)$.*
Allora $T(t) \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$ e

$$\frac{d}{dt}(T(t)u_0) = A(T(t)u_0) = T(t)(Au_0). \tag{C.4}$$

Stiamo supponendo gli operatori definiti su spazi di Hilbert, ma risultati analoghi ai precedenti si ottengono anche su spazi di Banach.

Osservazione C.3. Sia $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$ il semigruppo definito dal problema $(C.1)$. Si può dimostrare che per ogni $u_0 \in H$

$$T_A(t)u_0 = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} u_0, \tag{C.5}$$

in virtù di questa uguaglianza utilizzeremo la rappresentazione esponenziale anche per operatori non limitati, e scriveremo in generale:

$$T_A(t)u_0 = e^{-tA}u_0. \tag{C.6}$$

In realtà l'esponenziale di un operatore ha una definizione ben precisa nel caso in cui A sia un operatore limitato. Infatti, si ha che:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{C.7}$$

Si vede facilmente che, se A è limitato, quest'espressione è ben definita: la serie è assolutamente convergente e definisce un operatore lineare e limitato. Si può verificare che $u(t) = e^{-tA}u_0$ è soluzione del sistema $(C.1)$, con la definizione di e^A $(C.7)$.

A partire dal Teorema C.1 si può dimostrare, per operatori autoaggiunti, il seguente teorema:

Teorema C.3. *Sia A un operatore massimale monotono e autoaggiunto. Allora, per ogni $u_0 \in H$, esiste un'unica funzione $u \in C([0,+\infty),H) \cap C^1((0,+\infty),H) \cap C((0,+\infty),D(A))$ tale che*

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0 & t \in (0,+\infty), \\ u(0) = u_0 & t = 0. \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad e \quad \|u_t(t)\|_H = \|Au(t)\|_H \leq \frac{1}{t}\|u_0\|_H \qquad \forall t > 0,$$

e

$$u \in C^k((0,+\infty),D(A^l)) \qquad \forall\, k,l \text{ interi},$$

in cui $D(A^l)$, con $l \geq 0$, è lo spazio definito in $(C.2)$.

Per la dimostrazione del teorema si veda [2] Teorema VII.7.

C.2 Equazione del calore

Vediamo come applicare i precedenti risultati all'equazione del calore. Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0 & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{C.8}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto che supponiamo di classe C^∞ e tale che $\partial\Omega$ sia limitata.

Teorema C.4. *Supponiamo che $u_0 \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica funzione u verificante $(C.8)$ e tale che*

$$u \in C([0,+\infty),L^2(\Omega)) \cap C((0,+\infty),H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap C^1((0,+\infty),L^2(\Omega)).$$

Inoltre

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\epsilon, \infty)) \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{C.9}$$

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio $H = L^2(\Omega)$ e l'operatore non limitato $A : D(A) \subset H \to H$ definito nel modo seguente:

$$D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega),$$
$$Au = -\triangle u.$$

Verifichiamo che A è massimale monotono e autoaggiunto:

- A è monotono. Infatti, se $u \in D(A)$ si ha

$$(Au, u)_{L^2} = \int_\Omega (-\triangle u(x))u(x)\, dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq 0.$$

  Inoltre, per il Teorema di Agmon-Douglis-Nirenberg (pag.8), sappiamo che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ soluzione dell'equazione $u - \triangle u = f$. Dunque $R(I + A) = L^2(\Omega)$, cioè A è massimale monotono.

- Per verificare che A è autoaggiunto, avendo provato che è massimale monotono, basta dimostrare che l'operatore è simmetrico. Per ogni $u, v \in D(A)$ si ha:

$$(Au, v)_{L^2} = \int_\Omega (-\triangle u(x))v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$
$$(u, Av)_{L^2} = \int_\Omega u(x)(-\triangle v(x))\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

  dunque $(Au, v)_{L^2} = (u, Av)_{L^2}$.

Sono quindi verificate le ipotesi del Teorema C.3, applicando il quale otteniamo la prima parte dell'enunciato del teorema.
Resta da provare $(C.9)$. Si può dimostrare che

$$D(A^l) = \{u \in H^{2l}(\Omega); u = \triangle u = \cdots = \triangle^{l-1} u = 0 \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Per il Teorema C.3 sappiamo che la soluzione u di $(C.8)$ appartiene a $C^k((0,\infty), D(A^l))\ \forall\ k, l$ e dunque $u \in C^k((0,\infty), H^{2l}(\Omega))\ \forall\ k, l$.
Dal Teorema di immersione di Sobolev segue che $u \in C^k((0,\infty), C^k(\overline{\Omega}))$ $\forall\ k$. □

Osservazione C.4. Se chiamiamo u la soluzione del problema $(C.8)$ trovata nel Teorema C.4, l'Osservazione C.2 applicata a $(C.8)$ afferma che la funzione $v(x,t) = e^{-bt}u(x,t)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = -bv(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ v(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, t = 0, \end{cases}$$

con $b \in \mathbb{R}$. Chiaramente v avrà la stessa regolarità di u.

Consideriamo l'operatore $-\triangle$ e studiamo alcune delle proprietà del semigruppo $T(t)$ da esso generato. Utilizzeremo la notazione $e^{t\triangle}$, con il significato precisato nell'Osservazione C.3.
Riportiamo un teorema, per la cui dimostrazione si rinvia a [6] Teorema 1.4.1, che ci permetterà di estendere il semigruppo, definito in $L^2(\Omega)$, agli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema C.5. *Lo spazio $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ è invariante per il semigruppo $e^{t\triangle}$ che può essere esteso ad un semigruppo positivo di contrazioni a un parametro $T_p(t)$ su $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p \leq \infty$.*
Tali semigruppi sono fortemente continui per $1 \leq p < \infty$ e ben definiti nel senso che $T_p(t)u = T_q(t)u$ se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

Anche se i semigruppi $T_p(t)$ hanno diversi generatori, essi coincidono sui domini comuni, dunque non ci sarà confusione nell'indicarli con lo stesso simbolo $e^{t\triangle}$. Chiameremo $\{e^{t\triangle}\}_{t\geq 0}$ *semigruppo del calore* relativo al problema di Dirichlet in Ω.

Si può dimostrare che esiste una funzione positiva di classe C^∞, G_Ω : $\Omega \times \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, tale che

$$(e^{t\triangle}u)(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y,t)u(y)dy \qquad \forall u \in L^p(\Omega), 1 \le p \le \infty.$$

La funzione $G_\Omega(x,y,t)$, che chiameremo *nucleo del calore* per il problema di Dirichlet in Ω, ha le seguenti proprietà (per le dimostrazioni si rinvia a [6]):

(I) $G_{\Omega_1}(x,y,t) \le G_{\Omega_2}(x,y,t)$ se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ e $x,y \in \Omega_1$;

(II) $G_\Omega(x,y,t) = G_\Omega(y,x,t)$ per ogni $x,y \in \Omega$ e $t > 0$.

Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^N$ si ha che $G_{\mathbb{R}^N}(x,y,t) = G(x-y,t)$, in cui

$$G(x,t) = G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{C.10}$$

e dunque $e^{t\triangle}u = G_t * u$.

Proposizione C.3. *Sia $\{e^{t\triangle}\}_{t\ge0}$ il semigruppo del calore in $\mathbb{R}^N$ e $G_t(x)$ il nucleo del calore per il problema di Dirichlet in $\mathbb{R}^N$, definito in (C.10).*
Sono verificate le seguenti proprietà:

(a) $\|G_t\|_1 = 1$ *per ogni* $t > 0$*;*

(b) *se* $f \ge 0$*, allora* $e^{t\triangle}f \ge 0$ *e* $\|e^{t\triangle}f\|_1 = \|f\|_1$*;*

(c) *se* $1 \le q \le \infty$*, allora* $\|e^{t\triangle}f\|_q \le \|f\|_q$*, per ogni* $t>0$*;*

(d) *se* $1 \le p < q \le \infty$ *e* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$*, allora* $\|e^{t\triangle}f\|_q \le (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}}\|f\|_p$*, per ogni* $t > 0$*;*

(e) *dato un generico dominio* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, le proprietà (c) e (d) rimangono valide se consideriamo il semigruppo del calore per il problema di Dirichlet in* Ω*.*

Dimostrazione. (a) è un risultato ben noto.
Per (b) basta applicare il Teorema di Fubini e sfruttare (a).
(c) segue dal fatto che il semigruppo $T_q(t)$ è una contrazione. La stessa stima

si ottiene facilmente anche applicando prima il Teorema di Young, per il quale si ha $\|G_t * f\|_q \leq \|G_t\|_1 \|f\|_q$, e poi sfruttando (a).
Dimostriamo (d):

$$\|e^{t\triangle} f\|_q = \|G_t * f\|_q \leq \|G_t\|_{\frac{r}{r-1}} \|f\|_p \leq \|G_t\|_1^{\frac{r-1}{r}} \|G_t\|_\infty^{\frac{1}{r}} \|f\|_p \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}} \|f\|_p$$

in cui la prima disuguaglianza si ha dal Teorema di Young, la seconda si ottiene applicando la disuguaglianza di interpolazione e la terza sfruttando quanto affermato in (a).
Per dimostrare (e) denotiamo con $e^{t\triangle_\Omega}$ il semigruppo del calore per il problema di Dirichlet in Ω, per distinguerlo da quello definito in $\mathbb{R}^N$. Definiamo la funzione $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in \Omega$ e $\widetilde{f}(x) = 0$ altrimenti. Per (I) abbiamo che:

$$|e^{t\triangle_\Omega} f| \leq e^{t\triangle_\Omega} |f| \leq e^{t\triangle} |\widetilde{f}|,$$

applicando (c) e (d) segue quanto affermato in (e). □

Nel caso di domini limitati vale la seguente proposizione, che fornisce una proprietà di decadimento esponenziale per la soluzione dell'equazione del calore. In analogia con la notazione già utilizzata, dato un dominio Ω, denotiamo con $\lambda_\Omega^{(1)}$ il primo autovalore dell'operatore $-\triangle$ per il problema di Dirichlet in Ω.

Proposizione C.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, denotiamo con $\{e^{t\triangle}\}_{t\geq 0}$ il semigruppo del calore relativo al problema di Dirichlet in Ω. Per ogni $1 \leq p \leq \infty$ e per ogni $f \in L^p(\Omega)$ vale la seguente stima:*

$$\|e^{t\triangle} f\|_p \leq C(\Omega) e^{-\lambda_\Omega^{(1)} t} \|f\|_p, \qquad t \geq 0. \tag{C.11}$$

Dimostrazione. Per $t \in (0, 2)$ la $(C.11)$ si può ottenere direttamente dal punto (c) della Proposizione C.3. Infatti, applicando prima il punto (c) e scegliendo poi C in modo opportuno (basta ad esempio porre $C := e^{2\lambda_\Omega^{(1)}}$), si ha:

$$\|e^{t\triangle} f\|_p \leq \|f\|_p \leq C e^{-\lambda_\Omega^{(1)} t} \|f\|_p \,.$$

Vediamo una dimostrazione della stima per $p = 2$ e $t > 0$. Sia u soluzione del problema $(C.8)$ con dato iniziale f, ossia $u(x,t) = e^{t\triangle} f(x)$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx &= \int_\Omega \triangle u(x,t)u(x,t)dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \leq -\lambda_\Omega^{(1)} \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx,\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la formula di Green per la seconda uguaglianza e la caratterizzazione del primo autovalore tramite il quoziente di Rayleigh per la maggiorazione. Dunque si ha

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 \leq -2\lambda_\Omega^{(1)}\|u(t)\|_2^2 \\ &\|u(0)\|_2^2 = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

da cui segue che $\|u(t)\|_2 \leq e^{-\lambda_\Omega^{(1)} t}\|f\|_2$. Abbiamo quindi provato la $(C.11)$ per $p = 2$:

$$\|e^{t\triangle} f\|_2 \leq e^{-\lambda_\Omega^{(1)} t}\|f\|_2, \qquad t \geq 0. \tag{C.12}$$

Dimostriamo, ora, il caso generale supponendo $t \geq 2$. Si ha:

$$\begin{aligned}\|e^{t\triangle} f\|_p &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|e^{t\triangle} f\|_\infty = |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|e^{\triangle} e^{(t-1)\triangle} f\|_\infty \\ &\leq (4\pi)^{-\frac{N}{4}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|e^{(t-1)\triangle} f\|_2 = (4\pi)^{-\frac{N}{4}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|e^{(t-2)\triangle} e^{\triangle} f\|_2 \\ &\leq C(\Omega)e^{-\lambda_\Omega^{(1)}(t-2)}\|e^{\triangle} f\|_2,\end{aligned} \tag{C.13}$$

utilizzando la disuguaglianza di Hölder generalizzata per la prima stima, il punto (d) della Proposizione C.3, ponendo $p = 2$ e $q = \infty$ e considerando il semigruppo del calore per $t = 1$, per la seconda e la $(C.12)$, con il semigruppo del calore calcolato in $t - 2$, per l'ultima. La tesi segue se si stima $(C.13)$ nel modo seguente:

- se $p \geq 2$, $\|e^{\triangle} f\|_2 \leq \|f\|_2 \leq C(\Omega)\|f\|_p$, in cui la prima maggiorazione si ha dal punto (c) della Proposizione C.3 con $q = 2$, mentre la seconda si ottiene applicando la disuguaglianza di Hölder generalizzata;

- se $p < 2$, $\|e^{\triangle} f\|_2 \leq \|f\|_p$ che si ottiene dal punto (d) della Proposizione C.3 con $q = 2$.

$\square$

Bibliografia

[1] N.D. Alikakos. *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations.* Journal of Differential Equations, Vol.33 (1979), pag.201-225.

[2] H. Brezis. *Analisi funzionale: teoria e applicazioni.* Liguori Editore, Napoli, 1986.

[3] H. Brezis e T. Cazenave. *A nonlinear heat equation with singular initial data.* Journal d'Analyse Mathématique, Vol.68 (1996), pag.277-304.

[4] T. Cazenave, F. Dickstein e F.B. Weissler. *Sign-changing stationary solutions and blowup for the nonlinear heat equation in a ball.* Mathematische Annalen, Vol.344 (2009), pag.431-449.

[5] T. Cazenave e A. Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations.* Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol.13, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[6] E.B. Davies. *Heat Kernels and Spectral Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[7] R. Ikehata e T. Suzuki. *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type.* Hiroshima Mathematical Journal, Vol.26 (1996), pag.475-491.

[8] S. Kaplan. *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.16 (1963), pag.305-330.

[9] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley & Sons, New Delhi, 1989.

[10] S. Kesavan. *Nonlinear Functional Analysis: A First Course.* Hindustan Book Agency, New Delhi, 2004.

[11] T. Lee e W.M. Ni. *Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol.333 (1992), pag.365-378.

[12] H.A. Levine. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.51 (1973), pag.371-386.

[13] G.M. Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations.* World Scientific, Singapore, 1996.

[14] P. Quittner e P. Souplet. *Superlinear Parabolic Problems: Blow up, Global Existence and Steady States.* Birkhäuser, Basel, 2007.

[15] D.H. Sattinger. *On global solution of nonlinear hyperbolic equations.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.30 (1968), pag.148-172.

[16] P. Souplet. *Geometry of unbounded domains, Poincaré inequalities and stability in semilinear parabolic equations.* Communications in Partial Differential Equations, Vol.24 (1999), pag.951-973.

[17] P. Souplet. *Decay of heat semigroups in* L^∞ *and applications to nonlinear parabolic problems in unbounded domains.* Journal of Functional Analysis, Vol.173 (2000), pag.343-360.

[18] F.B. Weissler. *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p. Indiana University Mathematics Journal, Vol.29 (1980), pag.79-102.

[19] F.B. Weissler. *Semilinear evolution equations in Banach spaces.* Journal of Functional Analysis, Vol.32 (1979), pag.277-296.