Capitolo 3

SIMMETRIA MEDIANTE LO STUDIO DEL SEGNO DELL'AUTOVALORE PRINCIPALE DELL'OPERATORE LINEARIZZATO

Utilizziamo ora un approccio diverso dal moving plane per studiare proprietà di simmetria e monotonia delle soluzioni di (2.1) che si basa, oltre che sull'uso dei principi di massimo, su informazioni fornite dal segno dell'autovalore principale dell'operatore linearizzato $\mathcal{L}$ (e quindi legate all'indice di Morse della soluzione di (2.1)).

Questo nuovo metodo, introdotto per la prima volta in [P], funziona quando $f(x, s)$ è convessa nella variabile s e ci permette di ottenere risultati di simmetria, o per lo meno di parziale simmetria, anche in casi in cui non è applicabile la procedura del moving planes, per esempio se Ω non è convesso in direzione di x_1, o f non ha la giusta monotonia, o u cambia segno, poichè, come vedremo, non necessita di tali ipotesi.

A differenza di [P], in cui si studiano proprietà di simmetria di soluzioni classiche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, noi ci occuperemo di soluzioni deboli.

In questo capitolo studieremo quindi proprietà di simmetria di soluzioni deboli

$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ di problemi ellittici del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = g(x) & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

dove Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ con al solito qualche proprietà di simmetria
ed entrambe f e g hanno qualche proprietà di simmetria in x.

In tutto il capitolo supporremo inoltre che f e g abbiano inoltre le seguenti proprietà di **regolarità**:
$f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, di classe C^1 rispetto alla seconda variabile (facciamo questa ipotesi per poter considerare l'operatore linearizzato), g è continua.

3.1 Un risultato preliminare

Cominciamo con alcune **notazioni**:
Se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ contenente l'origine e simmetrico rispetto all'iperpiano

$$T_0 = \{x = (x_1, .., x_N) \in \mathbb{R}^N, x_1 = 0\}$$

denotiamo con Ω^- e Ω^+ i sottodomini a sinistra e a destra di T_0, cioè

$$\Omega^- \doteq \{x \in \Omega, x_1 < 0\} \qquad \Omega^+ \doteq \{x \in \Omega, x_1 > 0\}$$

Presa una soluzione debole u di (3.1) indichiamo con $\mathcal{L}$ l'operatore linearizzato in u, cioè

$$\mathcal{L} = \Delta + f_s(x,u)$$

e con $\lambda_1(\mathcal{L}, D)$ al solito il primo autovalore di $\mathcal{L}$ in un sottodominio $D \subseteq \Omega$ con condizione di Dirichlet omogenea.

Tutti i risultati di simmetria che vedremo in questo capitolo si basano sulla seguente Proposizione fondamentale.

In essa, preso in (3.1) un dominio Ω simmetrico rispetto ad un certo iperpiano T, la simmetria della soluzione u rispetto a T viene legata allo studio del segno del primo autovalore di $\mathcal{L}$ nei sottodomini di Ω a destra e a sinistra di T (cioè Ω^- e

Ω^+), nell'ipotesi che f sia convessa nella variabile s.
A meno di traslazioni e rotazioni del sistema di riferimento possiamo porre $T = T_0$ ed enunciare il risultato nella seguente forma:

Proposizione 3.1.
Sia $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (3.1), dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$ è un dominio limitato contenente l'origine e simmetrico rispetto all'iperpiano T_0 ed $f(x,s)$ e $g(x)$ sono simmetriche in x_1.
Se:
-f è strettamente convessa in s
-$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ sono entrambi non negativi
allora

u è simmetrica rispetto alla variabile x_1, cioè:

$$u(x_1, .., x_N) = u(-x_1, .., x_N)$$

Lo stesso risultato si ha se f è solo convessa ma $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ sono entrambi positivi.

Dimostrazione. Siano v^- e v^+ le funzioni riflesse di u rispettivamente nei domini Ω^- e Ω^+

$$v^-(x) = u(-x_1, x_2, .., x_N) \qquad x \in \Omega^-$$
$$v^+(x) = u(-x_1, x_2, .., x_N) \qquad x \in \Omega^+$$

Assumiamo dapprima che f sia strettamente convessa. In questo caso abbiamo

$$f(x, v^-(x)) - f(x, u(x)) \geq f_s(x, u(x)) \left(v^-(x) - u(x)\right) \qquad x \in \Omega^-$$
$$f(x, v^+(x)) - f(x, u(x)) \geq f_s(x, u(x)) \left(v^+(x) - u(x)\right) \qquad x \in \Omega^+$$

e l'uguaglianza stretta vale quando $v^-(x) \neq u(x)$ (rispettiv. $v^+(x) \neq u(x)$)

Consideriamo le funzioni

$$w^- \doteq v^- - u \qquad \text{in } \Omega^-$$
$$w^+ \doteq v^+ - u \qquad \text{in } \Omega^+$$

allora esse sono soprasoluzioni dell'equazione linearizzata nei loro rispettivi domini di definizione:

$$-\Delta w^- - f_s(x, u(x)) w^- \geq 0 \qquad \text{in } \Omega^- \tag{3.2}$$
$$-\Delta w^+ - f_s(x, u(x)) w^+ \geq 0 \qquad \text{in } \Omega^+ \tag{3.3}$$

con la disuguaglianza stretta quando $w^-(x) \neq 0$ (rispettivam. $w^+(x) \neq 0$)

infatti sfruttando l'equazione in (3.1), la simmetria di f rispetto ad x_1 e la stretta convessità di f abbiamo che $-\Delta w^- = -\Delta v^- + \Delta u = f(-x_1, ..x_N, v^-(x)) - f(x, u(x)) = f(x, v^-(x)) - f(x, u(x)) \geq f_s(x, u(x))w^-$ (stessa cosa vale per w^+)

inoltre dalla simmetria di g rispetto ad x_1 segue che

$$w^- = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega^- \tag{3.4}$$

$$w^+ = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega^+ \tag{3.5}$$

Se w^- e w^+ sono entrambe non negative nei rispettivi domini Ω^- e Ω^+, allora , per come sono definite ($w^-(x) = -w^+(-x) \quad , \forall x \in \Omega^-$), risulta $w^- \equiv w^+ \equiv 0$ e quindi u è simmetrica rispetto ad x_1.

Supponiamo quindi per assurdo che che una tra le due funzioni, diciamo w^+, sia negativa in qualche punto di Ω^+ (quindi per continuità sarà negativa in un aperto di Ω^+) e consideriamo una componente connessa D in Ω^+ dell'insieme dove $w^+ < 0$; allora, prendendo come funzione test nella (3.3) la $-w^+\chi_D$ (sfruttando il fatto che $w^+ = 0 \quad$ in ∂D, cosa che segue usando la (3.5) se eventualmente $\partial D \cap \partial\Omega^+ \neq \emptyset$) otteniamo:

$$\int_D |\nabla w^+|^2 - \int_D f_s(x, u)(w^+)^2 < 0 \tag{3.6}$$

e dalla caratterizzazione variazionale dell'autovalore principale $\mathcal{L}$ segue che $\lambda_1(\mathcal{L}, D) < 0$, pertanto, dal risultato di stretta monotonia dell'autovalore principale rispetto al dominio (Teorema 1.11) otteniamo $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) < 0$ che contrasta con le ipotesi fatte. Quindi u è simmetrica.

Assumiamo ora che f sia soltanto convessa ma che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) > 0$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$ allora (Teorema 1.12) vale il Principio di Massimo Debole per l'operatore linearizzato $\mathcal{L}$ in Ω^- e in Ω^+, quindi dalle (3.2)-(3.3)-(3.4)-(3.5) segue direttamente che

$$w^- \geq 0$$

$$w^+ \geq 0$$

ossia la simmetria di u. $\square$

Osservazione 3.1. *Quando f è solo convessa ma non strettamente convessa non è sufficiente la non negatività di $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ per ottenere la simmetria della soluzione.*

Mostriamolo con un semplice esempio in cui prendiamo $f(x, s)$ lineare nella variabile s e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) = \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) = 0$:

sia $\mu_1^- \doteq \lambda_1(\Delta, \Omega^-)$ il primo autovalore dell'operatore di Laplace in Ω^- con condizione di Dirichlet omogenea, e φ_1 la corrispondente autofunzione.
Riflettiamo φ_1 in modo dispari rispetto a T_0:

$$\widetilde{\varphi}_1(x) \doteq \begin{cases} \varphi_1(x) & , x \in \Omega^- \\ -\varphi_1(-x_1, x_2, .., x_N) & , x = (x_1, .., x_N) \in \Omega^+ \end{cases} \qquad , x \in \Omega$$

$\widetilde{\varphi}_1$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{\varphi}_1 = f(x, \widetilde{\varphi}_1) & \text{in } \Omega \\ \widetilde{\varphi}_1 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $f(x, s) = \mu_1^- s$

L'operatore linearizzato in φ_1 è

$$\mathcal{L} = \Delta + \mu_1^-$$

e quindi ovviamente (usando la simmetria rispetto ad x_1 dell'insieme Ω e dell'operatore di Laplace che implica $\lambda_1(\Delta, \Omega^-) = \lambda_1(\Delta, \Omega^+)$):

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) = \lambda_1(\Delta, \Omega^-) - \mu_1^- = 0$$

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) = \lambda_1(\Delta, \Omega^+) - \mu_1^- = \lambda_1(\Delta, \Omega^-) - \mu_1^- = 0$$

ma $\widetilde{\varphi}_1$ non è simmetrica in x_1.

Avendo in mente la Proposizione 3.1, per ottenere il risultato di simmetria sorge quindi il problema di dimostrare la non negatività di $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$.
Vediamo alcuni casi in cui ciò si ottiene facilmente ed è quindi possibile applicare la Proposizione 3.1:

- Soluzione di (3.1) semistabile, ossia $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega) \geq 0$:

  allora (Proposizione 1.11) $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) > 0$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$ quindi per ottenere la simmetria di tale soluzione rispetto ad x_1 basta la sola convessità (non stretta) di f.
  In particolare se supponiamo in più che Ω sia un anello o una palla, e che $f(x, s)$ e $g(x)$ siano radiali in x, allora applicando la Proposizione 3.1 in ogni direzione segue che tale soluzione è proprio radiale.

- Un altro semplice caso in cui si può dimostrare la non negatività di $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ ed applicare quindi la Proposizione 3.1 si ottiene facendo delle ipotesi del tipo di quelle di Gidas, Ni e Niremberg.
Vale infatti la seguente

Proposizione 3.2. *Assumiamo che il dominio Ω sia inoltre convesso nella direzione di x_1, che la soluzione u di (3.1) sia inoltre positiva, che $g = 0$, e che $f(x,s), x = (x_1, .., x_N)$ sia monotona decrescente nella variabile x_1 in Ω^+ e convessa nella variabile s, allora*

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) \geq 0 \ e \ \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) \geq 0$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ è non negativo (nello stesso modo si può mostrare anche che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) \geq 0$).

Supponiamo per assurdo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) < 0$.
Osserviamo che per $\mu < 0$ sufficientemente piccolo vale il principio di massimo per $\mathcal{L}$ nel sottodominio $\Omega_\mu^- \doteq \{x = (x_1, .., x_N) \in \Omega : x_1 < \mu\}$ (Teorema 1.3), e che quindi (Teorema 1.12), il primo autovalore di $\mathcal{L}$ in Ω_μ^-, $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega_\mu^-)$, è positivo.
Pertanto, per la continuità degli autovalori rispetto alla calotta Ω_λ, al variare di λ (ottenuta con lo stesso ragionamento della dimostrazione del Teorema 1.12) $\exists\ \mu < 0$ tale che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega_\mu^-) = 0$.

Poichè Ω è convesso nella direzione dell'asse x_1, possiamo considerare la funzione

$$w_\mu^-(x) \doteq u(P_\mu x) - u(x) = u(2\mu - x_1, x_2, .., x_N) - u(x) \qquad , x \in \Omega_\mu^-$$

essa è soprasoluzione dell'equazione linearizzata

$$-\Delta w_\mu^- - f_s(x,u) w_\mu^- \geq 0 \qquad \text{in } \Omega_\mu^- \tag{3.7}$$

infatti grazie alla monotonia di f in x_1 e alla convessità di f abbiamo $-\Delta w_\mu^- = f(P_\mu x, u(P_\mu x)) - f(x, u(x)) \geq f(x, u(P_\mu x)) - f(x, u(x)) \geq f_s(x, u(x)) w_\mu^-$, inoltre

$$w_\mu^- = \begin{cases} 0 & \text{su } \partial\Omega_\mu^- \setminus \partial\Omega \\ u(P_\mu x) > 0 & \text{su } \partial\Omega_\mu^- \cap \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

grazie alle ipotesi $u = g = 0$ su $\partial\Omega$ e $u > 0$ in Ω.

Se fosse $w_\mu^- \geq 0$ in Ω_μ^-, allora, per il principio di massimo forte e la (3.8) (w_μ^- è continua fino al bordo), sarebbe $w_\mu^- > 0$ in Ω_μ^- e quindi, per il Teorema 1.14 applicato scegliendo come funzione g proprio w_μ^-, dovrebbe valere il principio di massimo debole per $\mathcal{L}$ in Ω_μ^-. L'assurdo segue dal Teorema 1.12 perchè abbiamo dimostrato che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega_\mu^-) = 0$. $\square$

Osservazione 3.2. *Osserviamo che il risultato di simmetria così ottenuto è in realtà un po' più debole di quello dedotto mediante il moving planes. Le ipotesi fatte ora sono infatti un po' più forti: sostanzialmente sono quelle del Corollario 2.1 ma in più dobbiamo fare anche l'ipotesi di convessità in s per f. Questo perchè l'approccio del nuovo metodo è del tutto differente da quello del moving planes, e focalizza l'attenzione sul segno del primo autovalore dell'operatore linearizzato; l'ipotesi di convessità serve appunto per ricondursi all'equazione linearizzata piuttosto che all'equazione soddisfatta dalla differenza tra u e la sua riflessa che veniva invece valutata nel moving planes mediante i principi di massimo.*

Osservazione 3.3. *Già applicando il metodo del moving planes potevamo giungere alla conclusione*

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) > 0, \qquad \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$$

a patto di aggiungere nel Corollario 2.1 le ulteriori ipotesi:
$\partial\Omega$ regolare, $u \in H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,
f non dipendente da u ed $f(0) \geq 0$.

Infatti dal Corollario 2.1 avevamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0 \qquad \text{in } \Omega^-$$

inoltre, se $f(x,0) \geq 0, \forall x \in \Omega$, allora, $-\Delta u - f(x,u) + f(x,0) = f(x,0) \geq 0$ ossia u verifica $-\Delta u - c(x)u \geq 0$ con $c \in L^\infty(\Omega)$, pertanto, se $\partial\Omega$ è regolare ed in più $u \in C^1(\overline{\Omega})$, allora, applicando il Lemma di Hopf

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0 \text{ anche su } \partial\Omega^- \cap \partial\Omega.$$

Infine, se f non dipende da u, allora derivando rispetto ad x_1 ambo i membri dell'equazione $-\Delta u = f(x)$ (praticamente prendiamo come funzione test $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ ed applichiamo la definizione di derivata debole) e sfruttando l'ipotesi di crescente monotonia della f in Ω^-, otteniamo che $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ è soprasoluzione dell'equazione linearizzata:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = -\triangle\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \geq 0 \qquad \text{in } \Omega^-$$

ma allora è valida la condizione sufficiente per il principio di massimo debole data dal teorema 1.14 con $g = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ e pertanto (Teorema 1.12)

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) > 0$$

e lo stesso avviene per $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$.

3.2 Simmetria delle autofunzioni di un operatore lineare

Applichiamo la Proposizione 3.1 vista nel paragrafo precedente per ottenere il seguente risultato di simmetria per autofunzioni di un operatore lineare.

Corollario 3.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$ un dominio limitato contenente l'origine e simmetrico rispetto all'iperpiano T_0.*

Se A è un operatore lineare del tipo $A = -\triangle - c(x)$
dove $c(x)$ è simmetrica in x_1
allora

ogni autofunzione di A in Ω con condizioni di Dirichlet omegenee corrispondente all'autovalore μ_j è simmetrica in x_1 se:

$$\lambda_1(A, \Omega^-) > \mu_j \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Sia φ una autofunzione relativa a μ_j, essa risolve quindi

$$-\triangle\varphi = f(x, \varphi) \tag{3.10}$$

dove $\quad f(x,s) \doteq c(x)s + \mu_j s \quad$ è convessa in s (è lineare) e simmetrica nella variabile x_1. Consideriamo quindi l'operatore linearizzato

$$\mathcal{L} = -\triangle - c(x) - \mu_j \tag{3.11}$$

applicando la Proposizione 3.1, segue quindi che φ è simmetrica in x_1 se entrambi gli autovalori $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ sono positivi.
Vediamo quindi quand'è che ciò accade.

Osserviamo innanzitutto che, per la simmetria di $c(x)$ in x_1, abbiamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) = \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ (e $\lambda_1(A, \Omega^-) = \lambda_1(A, \Omega^+)$). Inoltre $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) = \lambda_1(A, \Omega^-) - \mu_j$, quindi è sufficiente che sia verificata la (3.9). □

Osservazione 3.4. *In particolare la (3.9) è verificata automaticamente se $j = 1$ (per il risultato di monotonia dell'autovalore principale rispetto a $c(x)$);*

Per j qualunque invece è verificata per esempio se

$\lambda_1(A, \Omega^-) \geq 0$ *e* $\mu_j < 0$

oppure

$\lambda_1(A, \Omega^-) > 0$ *e* $\mu_j \leq 0$

3.3 Simmetria delle soluzioni di indice di Morse uno

Facendo uso della Proposizione 3.1 (quindi sempre nell'ipotesi di convessità nella seconda variabile per f) possiamo provare, per domini simmetrici rispetto all'iperpiano T_0, la simmetria rispetto ad x_1 di ogni soluzione u avente indice di Morse uno, a patto che f e g siano simmetrici in x_1 e che un punto critico di u appartenga all'iperpiano di simmetria.
Per ora ci è sufficiente definire l'indice di Morse $m(u)$ di una soluzione u come il numero di autovalori negativi dell'operatore linearizzato $\mathcal{L}$ in u (rimandiamo all'Appendice per significati più profondi).

Teorema 3.1 (Simmetria per soluzioni di indice di uno).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ un dominio contenente l'origine e simmetrico rispetto all'iperpiano T_0. Sia $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una soluzione debole di (3.1) con f e g simmetriche rispetto ad x_1 (e verificanti le solite proprietà di regolarità).

Se f è strettamente convessa nella seconda variabile, u ha indice di Morse 1 ed esiste un punto critico P di u interno al dominio ed appartenente all'iperpiano di simmetria T allora

u è simmetrica in x_1.

Dimostrazione. Vogliamo utilizzare la Proposizione 3.1, quindi abbiamo bisogno di dimostrare che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ sono entrambi non negativi.

Proposizione 1.2.

Procedendo per assurdo possiamo assumere che uno di essi, per esempio $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$, sia negativo.
Poichè la soluzione è di indice di Morse 1, $\lambda_2(\mathcal{L}, \Omega) \geq 0$ e quindi dalla caratterizzazione variazionale ~~(Teorema 1.2)~~ abbiamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$. Pertanto (Teorema 1.12) in Ω^+ vale il Principio di Massimo Debole per l'operatore $\mathcal{L}$. Consideriamo in Ω^+ la funzione $w^+ = v^+ - u$ dove v^+ è la riflessa di u rispetto a T, allora, sfruttando l'equazione, la simmetria di f rispetto ad x_1 e la convessità di f nella seconda variabile, abbiamo

$$-\Delta w^+ - f_s(x, u) w^+ \geq 0 \qquad \text{in } \Omega^+ \tag{3.12}$$

inoltre dalla simmetria di g rispetto a x_1 abbiamo anche

$$w^+ = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega^+ \tag{3.13}$$

ma allora dal Principio di Massimo Debole segue che $w^+ \geq 0$ in Ω^+ e dal Principio di Massimo Forte che o $w^+ \equiv 0$ o $w^+ > 0$ in Ω^+. Il primo caso non è possibile in quanto implicherebbe la simmetria di u rispetto a T, da cui seguirebbe l'invarianza per riflessione dell'operatore $\mathcal{L}$ e quindi l'uguaglianza dei due autovalori $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ mentre essi hanno segno differente. Così l'unica possibilità è che sia $w^+ > 0$ in Ω^+. Allora dal lemma di Hopf segue che $\partial w^+/\partial \nu < 0$ su $T \cap \Omega$, dove ν è la normale esterna e $\partial\Omega^+$ e di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial w^+}{\partial \nu} > 0 \qquad \text{su } T \cap \Omega$$

che è impossibile perchè il punto critico P appartiene a $T \cap \Omega$ (dai risultati di regolarità interna per soluzioni di problemi ellittici segue che quella di cui stiamo parlando è una derivata classica).
Pertanto $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ sono entrambi non negativi. La tesi segue applicando a questo punto la Proposizione 3.1 (grazie all'ipotesi di stretta convessità di f che non avevamo ancora utilizzato). $\square$

In particolare se Ω è una palla centrata nell'origine, f e g sono a simmetria radiale nella x ed il punto P coincide con l'origine dal Teorema precedente segue

Corollario 3.2 (Simmetria radiale per soluzioni di indice uno).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ una palla centrata nell'origine O del sistema di riferimento,
$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è una soluzione debole di (3.1)
con g ed f a simmetria radiale in x (e verificanti le solite ipotesi di regolarità).

Se f è strettamente convessa nella seconda variabile, u ha indice di Morse 1 *e*

O è un punto critico di u
allora
u è radiale

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema poichè l'origine appartiene ad ogni iperpiano di simmetria. □

3.4 Simmetria assiale e monotonia di soluzioni di indice di Morse uno

Con le stesse tecniche possiamo dimostrare anche un interessante risultato di simmetria parziale, in cui cioè la soluzione eredita solo parte della simmetria del dominio, in questo caso quella assiale o cilindrica, e si ha anche un risultato di monotonia rispetto alla coordinata angolare.

Infatti, se assumiamo che Ω sia un dominio a simmetria radiale, quindi un anello o una palla centrati nell'origine O di $\mathbb{R}^N$, che f sia a simmetria radiale in x e che P sia un punto di massimo della soluzione u interno ad Ω (tale punto in generale non coinciderà, nel caso che Ω sia una palla, con l'origine O), allora, nelle stesse ipotesi del teorema precedente (in particolare di convessità per f e di indice 1 per u), si arriva in generale soltanto ad un risultato di simmetria assiale rispetto all'asse passante per l'origine O ed il punto P (tale simmetria in alcuni casi sarà in particolare proprio radiale, per esempio se Ω è una palla e $P \equiv O$ (Corollario 3.2 appena visto)).

Come vedremo, inoltre, i casi possibili in queste ipotesi sono soltanto due: o la soluzione u è proprio a simmetria radiale o è soltanto a simmetria assiale, non possono cioè verificarsi situazioni intermedie.

Sottolineamo infine che nel caso di simmetria assiale vera e propria abbiamo anche un risultato di stretta monotonia per la soluzione u oltre a delle utili informazioni sulla disposizione dei suoi punti critici, in particolare di massimo, all'interno del dominio Ω.

Ribadiamo infine che questo risultato di parziale simmetria è molto interessante in quanto, come vedremo, è applicabile a molti casi in cui non si può utilizzare il metodo del moving plane (perchè per esempio f non ha la giusta monotonia oppure Ω è un anello, quindi un dominio non convesso, o infine il valore assunto dalla funzione u all'interno del dominio non è maggiore di quello assunto sul bordo, ossia, nel caso di condizioni di Dirichlet omogenee, se la funzione u cambia segno) e per i quali si registra in effetti una rottura dalla simmetria radiale delle soluzioni (si veda il paragrafo sui controesempi nel capitolo precedente); e in tali casi ci permette quindi di dimostrare per lo meno la proprietà di simmetria assiale della soluzione.

Teorema 3.2 (Simmetria assiale per soluzioni di indice uno).
Sia Ω un anello o una palla centrati nell'origine O di $\mathbb{R}^N, N \geq 2$
sia $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (3.1)
con f e g a simmetria radiale in x (ed aventi la solita regolarità), quindi di:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \textit{in } \Omega \\ u = g(|x|) & \textit{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

Sia P un punto di massimo di u interno ad Ω e denotiamo con r_P l'asse $\overrightarrow{OP}$ passante per l'origine e P.

Se f è strettamente convessa nella seconda variabile ed
u ha indice di Morse uno
allora:

(i) *u è a simmetria assiale rispetto all'asse r_P;*

(ii) *se u non è a simmetria radiale allora non è mai simmetrica rispetto ad un qualunque iperpiano T passante per l'origine e non passante attraverso r_P;*

(iii) *se u non è a simmetria radiale allora*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_T}(x) > 0 \qquad \forall x \in T \cap \Omega \tag{3.15}$$

per ogni iperpiano T passante per l'origine e non passante per r_P, dove ν_T è la normale a T diretta verso il semispazio contenente P.
In particolare tutti i punti critici di u appartengono all'asse di simmetria r_P, ed i massimi giacciono sul semiasse che contiene P.

Dimostrazione.
(i) Dobbiamo dimostrare che u è simmetrico rispetto ad un qualunque iperpiano T_P passante per r_P, tale dimostrazione è identica a quella del Teorema 3.1 e fa quindi uso della Proposizione 3.1 (osserviamo che in questo primo punto basta richiedere che P sia un punto critico, senza specificare di che tipo).

(ii) (Nella dimostrazione di questo punto, come pure in quella del successivo, sfruttiamo il fatto che il punto critico P sia un punto di massimo) Supponiamo per assurdo che u sia simmetrico rispetto ad un certo iperpiano T_1 passante per l'origine e non passante per r_P e definiamo Ω_1^+ e Ω_1^- le due regioni aperte in cui T_1 divide Ω.

Poichè u non è a simmetria radiale, per il Corollario 3.2 P non è l'origine e quindi $P \notin T_1$, pertanto P apparterrà ad una delle due calotte Ω_1^+, Ω_1^-, diciamo Ω_1^-.

Per la simmetria esiste $P' \in \Omega_1^+$ tale che $u(P) = u(P') = \max_{\overline{\Omega}} u$.

Consideriamo ora un qualunque iperpiano per l'origine $\widetilde{T}$ "vicino" a T_1, cioè, detto ν_1 il versore normale a T_1 diretto verso il semispazio contenete P, consideriamo sulla sfera unitaria un intorno $I(\nu_1)$ di ν_1 e, per ogni $\widetilde{\nu} \in I(\nu_1)$, l'iperpiano $\widetilde{T}$ ortogonale a $\widetilde{\nu}$ passante per l'origine. Prendiamo l'intorno $I(\nu_1)$ sufficientemente piccolo, in modo che P e P' continuino ad appartenere a due calotte differenti rispetto a $\widetilde{T}$ ($P \in \widetilde{\Omega}^-$, $P' \in \widetilde{\Omega}^+$), $\forall \widetilde{\nu} \in I(\nu_1)$.

Vogliamo far vedere che u è simmetrica rispetto a $\widetilde{T}$, $\forall \widetilde{\nu} \in I(\nu_1)$.
Usiamo ancora una volta la Proposizione 3.1 e quindi mostriamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^+)$ sono entrambi non negativi.
Se $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^-) < 0$, allora, poichè la soluzione ha indice di Morse uno, deduciamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^+) > 0$ (Proposizione 1.2) e quindi, procedendo in maniera identica alla dimostrazione di (i) (quindi del Teorema 3.1), abbiamo che la funzione $\widetilde{w}^+ \doteq \widetilde{v}^+ - u$, dove $\widetilde{v}^+$ è la funzione riflessa di u in $\widetilde{\Omega}^+$, è positiva in $\widetilde{\Omega}^+$. Questo significa che $u < \widetilde{v}^+$ in $\widetilde{\Omega}^+$, in particolare che $u(P') < \widetilde{v}^+(P') = u(P'')$, dove P'' è il simmetrico di P' rispetto a $\widetilde{T}$, che non è possibile perchè $u(P') = u(P)$ è il massimo di u.
Questa contraddizione prova che $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^-) \geq 0$ e lo stesso avviene per $\lambda_1(\mathcal{L}, \widetilde{\Omega}^+)$.

Quindi u è simmetrica rispetto all'iperpiano $\widetilde{T}$ ortogonale a $\widetilde{\nu}$, per ogni direzione $\widetilde{\nu}$ in un opportuno intorno di ν_1.

Ora possiamo pensare, senza perdita di generalità, che tutti i possibili iperpiani di simmetria di Ω (cioè tutti gli iperpiani passanti per l'origine) corrispondano a versori appartenenti alla semisfera di $\mathbb{R}^N$ avente come bordo i vettori ν_P ortogonali agli iperpiani T_P passanti attraverso l'asse r_P.

Se rimuoviamo da questa semisfera tutti i vettori ν_P otteniamo un insieme aperto connesso M di direzioni in $\mathbb{R}^N$.

Abbiamo appena provato quindi che l'insieme S delle direzioni ν ortogonali ad iperpiani di simmetria per la soluzione u è un sottoinsieme aperto di M.

Ma S è anche un sottoinsieme chiuso di M: sia $\{\nu_n\}_n \subseteq S$, $\nu_n \longrightarrow \nu$ diciamo T_n l'iperpiano ortogonale a ν_n, T l'iperpiano ortogonale a ν, v_n il simmetrico di u rispetto a T_n, v il simmetrico di u rispetto a T; quindi $u(x) = v_n(x), \forall n$ (per l'ipotesi

$\nu_n \in S \quad \forall n$), inoltre $v_n(x) \longrightarrow v(x)$ (per la continuità della riflessione) e pertanto u(x)=v(x).

Pertanto, essendo M connesso, segue che $S \equiv M$ ossia che u è una funzione radiale, e siamo giunti quindi ad una contraddizione.

(iii) Supponiamo che u non sia a simmetria radiale e consideriamo un qualunque iperpiano T passante per l'origine e non passante per r_P. Come al solito denotiamo con Ω^- e Ω^+ le calotte create da T ed assumiamo che P appartenga ad Ω^-.

Per il punto **(ii)**, u non è simmetrica rispetto a T e quindi, per la Proposizione 3.1, uno tra $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-)$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+)$ deve essere negativo. Poichè $P \in \Omega^-$ procedendo come in **(i)** (quindi come in Teorema 3.1) mostriamo che $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) < 0$ e $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$: se infatti fosse $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) < 0$ allora (Teorema 1.2) $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) > 0$, quindi (Teorema 1.12) varrebbe il Principio di Massimo Debole in Ω^- e procedendo nel solito modo arriveremmo a $v^- > u$ in Ω^- che è impossibile perchè il punto di massimo $P \in \Omega^-$. Pertanto $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^+) > 0$ e di conseguenza (ancora Teorema 1.2) $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega^-) < 0$.

Pertanto (Teorema 1.12) vale il Principio di Massimo Debole per $\mathcal{L}$ in Ω^+ e questo implica che la funzione $w^+ \doteq v^+ - u$, soddisfacente

$$\begin{cases} -\triangle w^+ - f_s(|x|, u) w^+ \geq 0 & \text{in } \Omega^+ \\ w^+ = 0 & \text{su } \partial\Omega^+ \end{cases} \tag{3.16}$$

è non negativa in Ω^+, o meglio, per il Principio di Massimo Forte, che è proprio positiva in Ω^+. Ma allora applicando il Lemma di Hopf segue che $\partial w^+ / \partial \nu < 0$ su $T \cap \Omega$, dove ν è la normale esterna e $\partial\Omega^+$ e di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial w^+}{\partial \nu} > 0 \qquad \text{su } T \cap \Omega$$

E questo è vero per ogni iperpiano T passante per l'origine e non passante per r_P. Ciò implica in particolare che tutti i punti critici di u possono stare solo sull'asse r_P. Infine osserviamo che i punti di massimo possono stare solo sul semiasse di r_P contenente il punto P, infatti: $w^+ > 0$ in Ω^+ significa che $u < v^+$ in Ω^+ e quindi che u non può avere massimi in Ω^+, e la tesi segue scegliendo in particolare l'iperpiano T ortogonale all'asse r_P.

□

Osservazione 3.5. *Sottolineamo che quello ottenuto non è soltanto un risultato di simmetria, ma nel caso di simmetria assiale vera e propria esso è abbinato ad un* *risultato di stretta monotonia decrescente nell'angolo polare formato col semiasse* r_P.

*In genere si utilizza l'espressione "**Foliated Schwarz Symmetry**" proprio per indicare la simmetria assiale rispetto ad un asse passante per l'origine abbinata alla monotonia decrescente nell'angolo polare formato con l'asse.*

Vediamo ora alcuni **esempi** che rientrano in questo teorema:

1) Il primo che facciamo è l'Esempio 2.3 già visto nel Capitolo 2.

Ricordiamo che consideravamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & , in \quad \Omega \\ u > 0 & , in \quad \Omega \\ u = 0 & , su \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ era un dominio limitato, $N \geq 4$
e $p = \frac{N+2}{N-2}$.

Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$ allora, come visto, mediante un procedimento di minimizzazione vincolata o mediante il lemma del "Mountain pass" dimostravamo l'esistenza di una soluzione u e vedevamo che in generale, nel caso in cui Ω era un anello (e che quindi non rientrava nei casi trattati da [GNN]), essa non era radiale.

Ora, grazie al risultato appena visto, possiamo quindi concludere che tale u è a simmetria assiale, infatti

- essa ha indice di Morse uno in quanto è una soluzione di tipo "Mountain pass" (vedere Appendice)

- $f(x, s) = f(s) = s^p + \lambda s$ è strettamente convessa

2) Anche il prossimo esempio lo abbiamo già incontrato nel Capitolo 2 (Esempio 2.4)

dove consideravamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha u^p & in \quad \Omega \\ u > 0 & in \quad \Omega \\ u = 0 & su \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

nel caso in cui $\Omega =$ era una palla di $\mathbb{R}^N$.
Abbiamo già visto quindi che per α opportuni esso ammette soluzioni non radiali (ed infatti è un caso che non rientra nel teorema di [GNN] in quanto f non ha la giusta monotonia).

Come nel caso precedente possiamo quindi adesso affermare che tali soluzioni sono a simmetria assiale, in quanto soluzioni di indice di Morse uno.

Concludiamo questo capitolo riflettendo su alcuni **limiti di applicabilità** del Teorema 3.2.

Innanzitutto le soluzioni di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

di indice di Morse uno sono molto frequenti per vari tipi di nonlinearità poichè spesso i metodi variazionali utilizzati portano proprio a soluzioni di indice di Morse uno. Tuttavia, specialmente se f non dipende esplicitamente dalla variabile x ed è sopralineare, le soluzioni di indice di Morse uno sono positive, un esempio tipico è quello in cui $f(x,s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1$; spesso invece, le soluzioni di segno non costante hanno indice di Morse maggiore di uno.

Inoltre, in generale, la nonlinearità f può non essere convessa nella seconda variabile, basti pensare ancora al semplice caso $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1$.

Pertanto sarebbe opportuno avere risultati di simmetria dello stesso tipo per soluzioni di indice di Morse più alto e con differenti ipotesi sulla nonlinearità f.

Un risultato di questo tipo sarà dimostrato nel Capitolo 5.