per ogni derivata D del primo ordine in O tangente alla sottovarietà $\{\varrho = 0\} \cap \{\sigma = 0\}$.

Allora, per ogni direzione s in O che entra in Ω *trasversalmente a ciascuna superficie*

$$\frac{\partial u}{\partial s} < 0 \qquad \text{in } O \text{ in caso di disuguaglianza stretta in (1.2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} < 0 \quad o \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} < 0 \qquad \text{in } O \text{ in caso di uguaglianza in (1.2)}$$

1.2 Proprietà spettrali per operatori uniformemente ellittici autoaggiunti del II ordine

1.2.1 Autovalori ed autofunzioni

Vogliamo risolvere il problema agli autovalori con condizione di Dirichlet omogenea
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato

$$\begin{cases} -Lu = \lambda u & , \, in\ \Omega \\ u = 0 & , \, su\ \partial\Omega \end{cases}$$

dove $L = \Delta u + c(x)$, $c \in L^\infty(\Omega)$

Teorema 1.8 (di esistenza di autofunzioni, autovalori). *Per un certo* $k > 0$ *esiste una base ortonormale di* $L^2(\Omega)$ $\{\psi_n\}_n$ *ed una successione di numeri reali* $\{\lambda_n\}_n$ *con*

$$\lambda_n \to +\infty$$

$$-k < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .... \leq \lambda_n \leq ....$$

tali che

$$\begin{cases} -\Delta\psi_n - c(x)\psi_n = \lambda_n\psi_n & , \, in\ \Omega \\ \psi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Definizione 1.5. *Chiamiamo* $\{\psi_n\}_n, \{\lambda_n\}_n$ *rispettivamente autofunzioni ed autovalori di L in* Ω

Ed in particolare λ_1 *autovalore principale.*

Dimostrazione. Sia $k \geq ||c||_\infty$, allora, per questa scelta di k, la forma bilineare e continua su $H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = q(u, v) + k \int_\Omega uv$$

(dove $q(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega c(x) uv$ è la forma bilineare e continua associata all'-operatore L)
è coercitiva, infatti:

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - \|c\|_\infty \|u\|_2^2 + k\|u\|_2^2 \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (k - \|c\|_\infty)\|u\|_2^2 \\ &\geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 0 = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

quindi in particolare $a(u,v)$ è un prodotto scalare equivalente al prodotto scalare di $H_0^1(\Omega)$ (l'equivalenza segue dalla continuità e dalla coercitività).

Pertanto, data $f \in L^2(\Omega)$, per il teorema di Lax-Milgram, anzi in realtà per il teorema di Riesz, $\exists\,!\; u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta u - (c(x) - k)u = f & , \; in\ \Omega \\ u = 0 & , \; su\ \partial\Omega \end{cases}$$

E' ben definito, quindi, l'operatore lineare $G = (-\Delta - c(x) + k)^{-1}$

$$\begin{aligned} &G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ &f \to Gf \doteq u \end{aligned}$$

che è

- compatto (grazie all'immersione compatta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, Ω limitato);

- autoaggiunto:

$$\begin{aligned} < Gf, g >_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (Gf)g \\ &= \int_\Omega \nabla(Gf)\nabla(Gg) - \int_\Omega c(x)(Gf)(Gg) + k\int_\Omega (Gf)(Gg) \\ &= \int_\Omega f(Gg) =< f, Gg >_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

- definito positivo:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (Gf)f &= \int_\Omega |\nabla(Gf)|^2 - \int_\Omega c(x)(Gf)^2 + k\int_\Omega (Gf)^2 \\ &\geq \|Gf\|_2^2 + (k - \|c\|_\infty)\|Gf\|_2^2 > 0 \qquad , se\ f \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi applicando la teoria generale degli operatori lineari compatti e autoaggiunti segue che

esiste una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ $\{\psi_n\}_n$ di autofunzioni di G ed una successione di autovalori di G positivi $\{\mu_n\}_n$ convergente a zero che posso assumere non crescente (a patto di riordinarli), tali che $G\psi_n = \mu_n \psi_n$.

Poniamo

$$\beta_n \doteq \mu_n^{-1}$$

allora

$$\psi_n = G(\beta_n \psi_n)$$

Poichè l'immagine di G è in $H_0^1(\Omega)$, abbiamo che $\psi_n \in H_0^1(\Omega)$
inoltre

$$\begin{aligned}\int_\Omega \beta_n \psi_n v &= \int_\Omega \nabla G(\beta_n \psi_n) \nabla v - \int_\Omega c(x) G(\beta_n \psi_n) v + k \int_\Omega G(\beta_n \psi_n) v \\ &= \int_\Omega \nabla \psi_n \nabla v - \int_\Omega c(x) \psi_n v + k \int_\Omega \psi_n v \qquad , \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned}$$

quindi ψ_n è soluzione debole di $-\Delta\psi_n - (c(x) - k)\psi_n = \beta_n \psi_n \qquad , in\ \Omega$
ossia ψ_n è soluzione debole di

$$-\Delta\psi_n - c(x)\psi_n = \lambda_n \psi_n \qquad , in\ \Omega$$

con

$$\lambda_n \doteq (\beta_n - k) = (\mu_n^{-1} - k)$$

Osserviamo che (essendo $\mu_n \longrightarrow 0$, $\mu_n > 0$ e non crescente)

$$\lambda_n \longrightarrow +\infty$$

$$\lambda_n \text{ non decrescente}$$

$$\lambda_1 > -k$$

Resta da dimostrare che $\psi_n \in C^\infty(\Omega)$:

sia $x \in \Omega$, considero $B(x,r) \subset \Omega$
$\psi_n \in L^2(B(x,r))$ e verifica $-\Delta\psi_n = c(x)\psi_n + \lambda_n \psi_n \qquad , in\ B(x,r)$
dai risultati di regolarità interna segue che $\psi_n \in H^2(B(x,r))$
quindi, ripetendo, che $\psi_n \in H^4(B(x,r))$

e, iterando il procedimento, che $\psi_n \in H^k(B(x,r)), \forall k \in \mathbb{N}$
allora per le immersioni di Sobolev $\psi_n \in C^\infty(B(x,r))$
e dall'arbitrarietà di $x \in \Omega$ segue la tesi $\square$

Osservazione 1.1. *Se in particolare $L = \Delta$, $(c(x) = 0)$ possiamo prendere $k = 0$ e ripetere la stessa dimostrazione (questo caso più semplice si può trovare su [K1] e da esso abbiamo dedotto il caso più generale).*

Osservazione 1.2. *Si verifica facilmente che la stessa dimostrazione vale inoltre per operatori uniformemente ellittici autoaggiunti del II ordine più generali, ossia del tipo:*

$$L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}) + c(x)$$

dove

a_{ij} verifica la condizione di uniforme ellitticità
$a_{ij} = a_{ji}$ (simmetria)
$c \in L^\infty(\Omega)$

Osservazione 1.3. *$\{\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n + k}}\}_n$ è una base ortonormale di $H_0^1(\Omega)$*
infatti:

- *ortonormalità:*
  come già osservato nella dimostrazione, la forma bilineare

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega c(x)u^2 + k\int_\Omega u^2$$

  è un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ equivalente a quello solito e (essendo ψ_n soluzione di $-\Delta\psi_n - c(x)\psi_n = \lambda_n\psi_n$ ed una base ortonormale di $L^2(\Omega)$)

$$a(\psi_n, \psi_m) = (\lambda_n + k)\int_\Omega \psi_n\psi_m = (\lambda_n + k)\delta_{nm}$$

- *completezza:*
  sia $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $a(u,\psi_n) = 0, \forall n$, vogliamo far vedere che $u = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= a(u,\psi_n) = \int_\Omega \nabla u \nabla\psi_n - \int_\Omega c(x)u\psi_n + k\int_\omega u\psi_n = \\ &= \int_\Omega c(x)u\psi_n + \lambda_n\int_\omega u\psi_n - \int_\Omega c(x)u\psi_n + k\int_\omega u\psi_n = \\ &= \mu_n^{-1}\int_\Omega u\psi_n \end{aligned}$$

quindi

$$\int_\Omega u\psi_n = 0, \forall n$$

ma $\{\psi_n\}$ *è una base ortonormale (e quindi completa) di* $L^2(\Omega)$ *ed* $u \in L^2(\Omega)$ *quindi*

$$u = 0.$$

Teorema 1.9 (Caratterizzazione variazionale di (ψ_n, λ_n)). *Definiamo il Quoziente di Rayleigh*

$$R(v) \doteq \frac{q(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega c(x)v^2}{\int_\Omega v^2} \qquad , v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0$$

allora

$$\lambda_1 = R(\psi_1) = \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} R(v)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n = R(\psi_n) &= \max_{\substack{v \in span\{\psi_1, .., \psi_n\} \\ v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0}} R(v) \\
&= \min_{\substack{v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\} \\ v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0}} R(v) \\
&= \min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ dim W = n}} \max_{v \in W} R(v) \qquad , n \geq 2
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Ovviamente $\lambda_n = R(\psi_n) \quad \forall n \geq 1$

Se $v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\}$ in $L^2(\Omega)$ allora l'espansione di Fourier in $L^2(\Omega)$ di v ($\{\psi_n\}$ è una base di $L^2(\Omega)$) è:

$$v = \sum_{h=n}^{\infty} \alpha_h \psi_h \qquad , \alpha_h = \int_\Omega v\psi_h$$

Sia $v_l \doteq \sum_{h=n}^{l} \alpha_h \psi_h$ allora

$$v_l \longrightarrow v \quad in \quad L^2(\Omega)$$

Osserviamo che

$$v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\} \quad in \quad L^2(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\} \quad in \quad H_0^1(\Omega)$$

infatti (ricordando l' Osservazione (1.3)):
$(v, \psi_h)_{H_0^1(\Omega)} = a(v, \psi_h) = (\lambda_h + k) \int_\Omega v\psi_h = (\lambda_h + k)(v, \psi_h)_{L^2(\Omega)}$

Inoltre (ancora Osservazione (1.3)) una base ortonormale di $H_0^1(\Omega)$ è data da $\{\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n+k}}\}_n$.

Pertanto l'espansione di Fourier di v in $H_0^1(\Omega)$ è:

$$v = \sum_{h=n}^{\infty} \gamma_h \frac{\psi_h}{\sqrt{\lambda_h + k}} \qquad , \gamma_h = (v, \frac{\psi_h}{\sqrt{\lambda_h + k}})_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\lambda_h + k} \int_\Omega v\psi_h = \alpha_h \sqrt{\lambda_h + k}$$

Ossia coincide con quella in $L^2(\Omega)$.

Da ciò segue quindi che $\quad v_l \longrightarrow v \quad in \quad H_0^1(\Omega)$

Scrivendo quindi $R(v)$ nel seguente modo ($a(u,u)$ è la norma di $H_0^1(\Omega)$):

$$R(v) = \frac{a(v,v)}{\int_\Omega v^2} - k$$

appare evidente che

$$R(v_l) \longrightarrow R(v)$$

Usando la monotonia non decrescente di $\{\lambda_n\}$, abbiamo che per ogni l vale:

$$\begin{aligned} R(v_l) &= \frac{a(v_l, v_l)}{\int_\Omega v_l^2} - k = \frac{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 a(\psi_h, \psi_h)}{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 \int_\Omega \psi_h^2} - k = \frac{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 (\lambda_h + k) \int_\Omega \psi_h^2}{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 \int_\Omega \psi_h^2} - k = \\ &= \frac{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 (\lambda_h + k)}{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2} - k = \frac{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2 \lambda_h}{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2} \geq \lambda_n \frac{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2}{\sum_{h=n}^{l} \alpha_h^2} = \lambda_n \end{aligned}$$

E quindi passando al limite segue che $R(v) \geq \lambda_n \quad \forall\, v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\}$ e inoltre esso è assunto in ψ_n.

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\} \\ v \neq 0}} R(v)$$

se $n = 1$

$$\lambda_1 = R(\psi_1) = \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} R(v)$$

Sia ora $W_n \doteq span\{\psi_1, \psi_2.., \psi_n\}$, se $v \in W_n$ allora $v = \sum_{h=1}^n \alpha_h \psi_h$, quindi

$$\begin{aligned} R(v) &= \frac{a(v,v)}{\int_\Omega v^2} - k = \frac{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 a(\psi_h, \psi_h)}{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 \int_\Omega \psi_h^2} - k = \frac{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 (\lambda_h + k) \int_\Omega \psi_h^2}{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 \int_\Omega \psi_h^2} - k = \\ &= \frac{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 (\lambda_h + k)}{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2} - k = \frac{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2 \lambda_h}{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2} \leq \lambda_n \frac{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2}{\sum_{h=1}^n \alpha_h^2} = \lambda_n \end{aligned}$$

inoltre λ_n è assunto in $v = \psi_n (\in W_n)$, quindi abbiamo provato che

$$\lambda_n = \max_{\substack{v \in span\{\psi_1, .., \psi_n\} \\ v \neq 0}} R(v)$$

Infine, se $W \subset H_0^1(\Omega)$ è un sottospazio di dimensione finita n, allora esiste $v \in W$ tale che $v \perp \{\psi_1, .., \psi_{n-1}\}$ (si vede per esempio applicando il Teorema di Borsuk-Ulam) e quindi per quanto già dimostrato

$$R(v) \geq \lambda_n$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{v \in W} R(v) \geq \lambda_n$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ dimW = n}} \max_{v \in W} R(v) \geq \lambda_n$$

Tuttavia vale anche la disuguaglianza opposta perchè, per quanto già dimostrato, su $W = W_n$,

$$\max_{v \in W_n} R(v) = \lambda_n$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ dimW = n}} \max_{v \in W} R(v) \leq \lambda_n$$

da cui segue che

$$\lambda_n = \min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ dimW = n}} \max_{v \in W} R(v)$$

$\square$

Osservazione 1.4. *L'ultima caratterizzazione data di λ_n è intrinseca, nel senso che non dipende dalle autofunzioni scelte.*

1.2.2 Autovalore ed autofunzione principale

Analizziamo ora delle **proprietà della coppia** (ψ_1, λ_1) che sono conseguenze del principio di massimo forte applicato all'autofunzione ψ_1 e che quindi valgono se Ω **è connesso.**

Da adesso in poi assumiamo quindi anche che Ω sia connesso.

Lemma 1.2. *Sia* $w \neq 0$, $w \in H_0^1(\Omega)$ *t.c.* $R(w) = \lambda_1$ *allora* w *è una autofunzione corrispondente a* λ_1

Dimostrazione. Sia $v \in H_0^1(\Omega)$, $t > 0$ allora $w + tv \in H_0^1(\Omega)$ e, per la caretterizzazione variazionale, $R(w) = \lambda_1 \leq R(w + tv)$
assumiamo senza perdita di generalità che $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$ (normalizzando), quindi

$$\frac{\int_\Omega |\nabla(w + tv)|^2 - \int_\Omega c(x)(w + tv)^2}{\int_\Omega (w + tv)^2} \geq \lambda_1 = \int_\Omega |\nabla w|^2 - \int_\Omega c(x)w^2$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega |\nabla(w + tv)|^2 - \int_\Omega c(x)(w + tv)^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega (w + tv)^2$$

$$\Downarrow$$

$$2t \int_\Omega \nabla w \nabla v + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 - t^2 \int_\Omega c(x)v^2 - 2t \int_\Omega c(x)wv \geq 2t\lambda_1 \int_\Omega wv + t^2 \lambda_1 \int_\Omega v^2$$

divido per $2t > 0$, per $2t < 0$ e passo al limite per $t \longrightarrow 0$, ottenendo

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v - \int_\Omega c(x)wv = \lambda_1 \int_\Omega wv$$

$\square$

Teorema 1.10. *Il primo autovalore λ_1 è semplice e la corrispondente autofunzione non cambia segno (quindi in particolare possiamo scegliere ψ_1 tale che $\psi_1 > 0$ in Ω)*

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che la prima autofunzione non cambia segno.

Sia $\psi \in H_0^1(\Omega)$ una qualunque autofunzione corrispondente all'autovalore λ_1, ossia

$$\int_\Omega \nabla\psi\nabla v - \int_\Omega c(x)\psi v = \lambda_1 \int_\Omega \psi v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

scegliendo come funzione test $v = \psi^+$ abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla\psi^+|^2 - \int_\Omega c(x)(\psi^+)^2 = \lambda_1 \int_\Omega (\psi^+)^2$$

allo stesso modo scegliendo come funzione test $v = \psi^-$ abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla\psi^-|^2 - \int_\Omega c(x)(\psi^-)^2 = \lambda_1 \int_\Omega (\psi^-)^2$$

Supponiamo per assurdo che ψ cambi segno, ossia che $\psi^+ \not\equiv 0$ e $\psi^- \not\equiv 0$ allora dalle due identità precedenti seguirebbe che $\lambda_1 = R(\psi^+) = R(\psi^-)$, e quindi dal Lemma 1.2 avremmo che ψ^+,ψ^- sono entrambe autofunzioni relative all'autovalore λ_1:

$$-\Delta\psi^+ - c(x)\psi^+ = \lambda_1\psi^+ \qquad , in\ \Omega$$

$$-\Delta\psi^- - c(x)\psi^- = \lambda_1\psi^- \qquad , in\ \Omega.$$

Sappiamo inoltre che

$$\psi^+ \geq 0 \qquad in\ \Omega$$

$$\psi^- \geq 0 \qquad in\ \Omega$$

e pertanto, applicando ad entrambe il principio di massimo forte arriveremmo alla contraddizione

$$\psi^+ > 0 \qquad in\ \Omega$$

$$\psi^- > 0 \qquad in\ \Omega$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\psi \geq 0$ in Ω oppure $\psi \leq 0$ in Ω , e dal principio di massimo forte segue quindi che $\psi > 0$ in Ω oppure $\psi < 0$ in Ω

Dimostriamo ora che l'autovalore principale è semplice, ossia che lo spazio delle autofunzioni ad esso associate è monodimensionale.

Supponiamo per assurdo che esistano due autofunzioni ψ_1 e $\tilde{\psi}_1$ relative a λ_1 e t.c. $\psi_1 \perp \tilde{\psi}_1$ ossia $\int_\Omega \psi_1\tilde{\psi}_1 = 0$. Ciò sarebbe assurdo perchè per quanto dimostrato al punto precedente, sia ψ_1 che $\tilde{\psi}_1$ sono di segno costante. □

Teorema 1.11. *L'autovalore principale λ_1 è strettamente decrescente come funzione di Ω.*

Dimostrazione. Poniamo $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$

se $\tilde{\Omega} \subsetneq \Omega$ allora $H_0^1(\tilde{\Omega}) \subsetneq H_0^1(\Omega)$ quindi dalla caratterizzazione variazionale di λ_1 segue che

$$\lambda_1(\tilde{\Omega}) \geq \lambda_1(\Omega)$$

mostriamo che vale la disuguaglianza stretta.
Supponiamo per assurdo che valga $\lambda_1(\tilde{\Omega}) = \lambda_1(\Omega) \doteq \lambda_1$ allora, detta $\tilde{\psi}_1$ l'autofunzione associata a $\lambda_1(\tilde{\Omega})$, definiamo il suo prolungamento a zero fuori di $\tilde{\Omega}$

$$\psi_1 = \begin{cases} \tilde{\psi}_1 & , in\ \tilde{\Omega} \\ 0 & , in\ \Omega \backslash \tilde{\Omega} \end{cases}$$

allora ψ_1 verifica debolmente

$$\begin{cases} -L\psi_1 = \lambda_1 \psi_1 & , in\ \Omega \\ \psi_1 = 0 & , in\ \partial\Omega \end{cases}$$

Infatti, usando ancora la caratterizzazione variazionale, sappiamo che $\tilde{\psi}_1$ minimizza il coefficiente di Rayleigh e $\lambda_1 = R(\tilde{\psi}_1)$, ma per come abbiamo definito ψ_1, essa è una funzione di $H_0^1(\Omega)$ e il coefficiente di Rayleigh calcolato in ψ_1 assume lo stesso valore λ_1 ($R(\tilde{\psi}_1) = R(\psi_1) = \lambda_1$), e, poichè per ipotesi $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ allora anche ψ_1 è un minimo (sulle funzioni di $H_0^1(\Omega)$), ossia è una autofunzione associata a $\lambda_1(\Omega)$ ma allora deve essere $\psi_1 > 0$ su Ω, in contraddizione con il fatto che per definizione $\psi_1 = 0$ su $\Omega \backslash \tilde{\Omega}$. □

Autovalore principale e principio di massimo

Vale la seguente equivalenza:

Teorema 1.12. $\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow$ *vale il principio di massimo debole per L in Ω*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$: assumiamo che valga il principio di massimo debole e supponiamo per assurdo che sia $\lambda_1 \leq 0$; facciamo quindi vedere che la prima autofunzione ψ_1 contraddice il principio di massimo debole:
$\psi_1 > 0$ per Teorema 1.10 e verifica

$$\begin{cases} -L\psi_1 = \lambda_1 \psi_1 \leq 0 & , in\ \Omega \\ \psi_1 = 0 & , in\ \partial\Omega \end{cases}$$

e quindi per il principio di massimo debole dovrebbe essere

$$\psi_1 \leq 0 \qquad , in\, \Omega \quad .$$

$\Rightarrow$: assumiamo $\lambda_1 > 0$ e dimostriamo innanzitutto che:
vale il principio di massimo debole per L in U, $\forall\, U$ aperto t.c. $\overline{U} \subset \Omega$

sia quindi U aperto t.c. $\overline{U} \subset \Omega$, e ψ_1 la prima autofunzione di L in tutto Ω, la tesi segue applicando la condizione sufficiente Teorema 1.4 per il principio di max debole con $g = \psi_1$, infatti tale funzione verifica tutte le ipotesi necessarie:
$g \in C(\overline{U}) \cap W^{2,N}(U)$ (infatti più in generale $\psi_1 \in C^\infty(\Omega)$)
$g > 0\, in\, \overline{U}$ (in quanto $\psi_1 > 0\, in\, \Omega$)
$-Lg = \lambda_1 g \geq 0 \qquad , in\, \overline{U}$

A questo punto consideriamo $\tilde{\Omega} \supsetneq \overline{\Omega}$ $\;t.c.\;$ $\lambda_1(\tilde{\Omega}) > 0$ ed applichiamo quanto appena dimostrato con $U = \Omega$.

Dobbiamo comunque dimostrare che un tale insieme $\tilde{\Omega}$ esiste, sfruttando il fatto che $\lambda_1(\Omega) > 0$.

A tal proposito consideriamo una famiglia di insiemi aperti incapsulati $\{\Omega_n\}_n$ tali che

$$\overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n \qquad , \forall n$$

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_n \qquad , \forall n$$

$$\Omega_n \longrightarrow \Omega \qquad \left(\text{cioè } \Omega = \bigcap_n^\infty \Omega_n \right)$$

e supponiamo per assurdo che $\lambda_1(\Omega_n) \leq 0, \quad \forall n$.

Per ogni n esiste la prima autofunzione di Dirichlet di L in Ω_n, chiamiamola φ_n, quindi

$$\varphi_n > 0 \text{ in } \Omega_n \tag{1.3}$$

e

$$\int_{\Omega_n} \nabla\varphi_n \nabla v - \int_{\Omega_n} c(x)\varphi_n v = \lambda_1(\Omega_n) \int_{\Omega_n} \varphi_n v \qquad , \forall v \in H_0^1(\Omega_n) \tag{1.4}$$

Osserviamo innanzitutto che esiste $\tilde{\lambda} \leq 0$ tale che $\lambda_1(\Omega_n) \longrightarrow \tilde{\lambda}$ (dalla monotonia dell'autovalore principale rispetto al dominio segue infatti che la successione $\{\lambda_1(\Omega_n)\}_n$ è monotona crescente, inoltre è limitata dall'alto per l'ipotesi fatta $\lambda_1(\Omega_n) \leq 0$).

Inoltre è facile mostrare che la successione $\{\varphi_n\}_n$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Dalla caratterizzazione variazionale si ha infatti che

$$\lambda_1(\Omega_n) = R(\varphi_n) \geq \|\varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega_n)} - \|c\|_{L^\infty(\Omega_n)} \geq \|\varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|c\|_{L^\infty(\Omega_1)}$$

e la tesi segue quindi dalla limitatezza della $\{\lambda_1(\Omega_n)\}$.

Pertanto esiste n_k ed esiste $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ tali che

$$\varphi_{n_k} \rightharpoonup \tilde{\varphi} \text{ in } H_0^1(\Omega)$$

$$\varphi_{n_k} \to \tilde{\varphi} \text{ in } L^2(\Omega)$$

$$\varphi_{n_k} \to \tilde{\varphi} \text{ q.o. in } \Omega$$

Ma allora, passando al limite in (1.4) e restringendoci a funzioni test $v \in H_0^1(\Omega)$, segue che

$$\int_\Omega \nabla\tilde{\varphi}\nabla v - \int_\Omega c(x)\tilde{\varphi}v = \tilde{\lambda}\int_\Omega \tilde{\varphi}v \qquad ,\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

inoltre $\tilde{\varphi} > 0$ in Ω.

Pertanto $\tilde{\varphi}$ è proprio la prima autofunzione in Ω e $\tilde{\lambda} \equiv \lambda_1(\Omega)$ che è assurdo in quanto per ipotesi $\lambda_1(\Omega) > 0$.

□

Teorema 1.13. *L'autovalore principale λ_1 è strettamente decrescente come funzione del coefficiente $c(x)$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{c}(x) \lneqq c(x)$ q.o. allora $R_{\tilde{c}}(v) \geq R_c(v)$ e dalla caratterizzazione variazionale di λ_1 segue che

$$\lambda_1(\tilde{c}(x)) \geq \lambda_1(c(x))$$

mostriamo che vale la disuguaglianza stretta:

sia ψ_1 l'autofunzione relativa a $\lambda_1(c(x))$, che possiamo assumere (Teorema 1.10) positiva in Ω allora

$$\begin{cases} 0 = -L_c\psi_1 - \lambda_1(c(x))\psi_1 & \\ \quad = (-\Delta - c(x) - \lambda_1(c(x)))\,\psi_1 & \\ \quad \lneqq (-\Delta - \tilde{c}(x) - \lambda_1(c(x)))\,\psi_1 & , \, in\ \Omega \\ \quad = -L_{\tilde{c}}\psi_1 - \lambda_1(c(x))\psi_1 & \\ & \\ \psi_1 = 0 & , \, in\ \partial\Omega \end{cases}$$

pertanto , prendendo $g = \psi_1$, è verificata la condizione sufficiente (Teorema 1.5) per il principio di massimo debole per funzioni continue in Ω per l'operatore $(\Delta + \tilde{c}(x) + \lambda_1(c(x)))$
ma allora, per quanto dimostrato al punto precedente (l'implicazione $\Leftarrow$ del Teorema 1.12 vale infatti anche sotto l'ipotesi più restrittiva che valga il principio di massimo debole solo su funzioni continue, la dimostrazione è la stessa in quanto $\psi_1 \in C(\Omega)$), l'autovalore principale λ_1 di tale operatore in Ω è positivo, ossia $0 < \lambda_1 = \lambda_1(\tilde{c}(x)) - \lambda_1(c(x))$ e quindi

$$\lambda_1(\tilde{c}(x)) > \lambda_1(c(x))$$

□

1.2.3 Ulteriori proprietà

Riportiamo ora alcune proprietà degli autovalori e delle autofunzioni che ci saranno utili nel corso delle dimostrazioni successive.
Continuiamo a supporre che Ω sia connesso.

Osserviamo in particolare che sotto queste ipotesi si ha il seguente

Lemma 1.3.

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

Dimostrazione. Se per assurdo $\lambda_1 = \lambda_2$ allora dalla caratterizzazione variazionale del primo e del secondo autovalore segue che $\exists\,\psi$ sia positiva sia ortogonale a se stessa (basta prendere $\psi = \psi_1 = \psi_2$)che è un assurdo. □

Proposizione 1.1. *Se ho una autofunzione $\psi \gneqq 0$*
allora

$$\psi = \psi_1$$

e quindi in particolare $\psi > 0$

Dimostrazione. Segue dall'ortogonalità delle autofunzioni relative ad autovalori diversi. Infatti $\psi \in H_0^1(\Omega)$ e verifica $-\Delta\psi - c(x)\psi = \lambda_k\psi$ per un certo $k \geq 1$ e sappiamo che $\lambda_k > \lambda_1$ per $k \geq 2$ per il Lemma 1.3.

Supponiamo per assurdo che ψ non sia la prima autofunzione ossia che $k \geq 2$, allora, grazie alla caratterizzazione variazionale del k–esimo autovalore, segue che ψ è ortogonale almeno a ψ_1, cioè

$$\int_\Omega \psi\psi_1 = 0$$

Ciò è assurdo in quanto $\psi \gneqq 0$ per ipotesi e $\psi_1 > 0$ per il Teorema 1.10 □

Proposizione 1.2. *Se* $\lambda_2(\Omega) \geq 0$ *e* $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$,$\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$ *allora*

$$o \quad \lambda_1(\Omega') \geq 0 \ e \ \lambda_1(\Omega'') \geq 0$$
$$oppure\ se\ \lambda_1(\Omega') < 0 \ allora\ \lambda_1(\Omega'') > 0$$

Dimostrazione. Utilizzando la caratterizzazione variazionale del secondo autovalore

$$\lambda_2(\Omega) = \min_{\substack{v \perp \psi_1 \\ v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0}} \frac{q(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

e l'ipotesi $\lambda_2(\Omega) \geq 0$, segue che

$$q(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega c(x)v^2 \geq 0 \qquad ,\forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \perp \psi_1$$

considero le due funzioni di $H_0^1(\Omega)$ definite nel modo seguente:
$\psi_1' \doteq$ l'estensione a 0 fuori di Ω' della prima autofunzione di L in Ω'
e $\psi_1'' \doteq$ l'estensione a 0 fuori di Ω'' della prima autofunzione di L in Ω''.
Osserviamo che per come sono definite si ha $q(\psi_1', \psi_1'') = 0$ essendo $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$ inoltre $q(\psi_1', \psi_1') = \lambda_1(\Omega')$ e $q(\psi_1'', \psi_1'') = \lambda_1(\Omega'')$ (considero ψ_1' e ψ_1'' normalizzate). Inoltre esse non sono ortogonali a ψ_1, ma possiamo sceglierne una opportuna combinazione lineare $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ che lo sia:

$$v_0 = \alpha\psi_1' + \beta\psi_1'' \qquad ,con\ \alpha = -(\psi_1'', \psi_1)_{L^2(\Omega)} \quad ,\beta = (\psi_1', \psi_1)_{L^2(\Omega)}$$

e quindi tale v_0 verifica

$$\begin{aligned} 0 \leq q(v_0, v_0) &= \alpha^2\lambda_1(\Omega') + \beta^2\lambda_1(\Omega'') + 2\alpha\beta q(\psi_1', \psi_1'') \\ &= \alpha^2\lambda_1(\Omega') + \beta^2\lambda_1(\Omega'') \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Definizione 1.6. *Definiamo regione nodale di un'autofunzione ψ una qualunque componente connessa dell'insieme $\{x \in \Omega | \psi(x) \neq 0\}$*

Lemma 1.4. *Ciascuna autofunzione ψ non può essere identicamente nulla in nessun sottodominio del proprio dominio.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima autofunzione il risultato è gia noto (ψ è positiva o negativa in tutto il dominio).
Per ψ_n, $n \geq 2$ basta applicare il principio di massimo forte. Infatti sappiamo che ψ_n cambia segno, quindi, definiti

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \psi_n > 0\} \qquad \Omega_- = \{x \in \Omega : \psi_n < 0\} \qquad \Omega_0 = \{x \in \Omega : \psi_n = 0\},$$

consideriamo la restrizione di ψ_n al dominio $\Omega' = \Omega_0 \cup \Omega_+$.

Essa verifica

$$\begin{cases} -L\psi_n = \lambda_n \psi_n & \text{in } \Omega' \\ \psi_n \geq 0 & \text{in } \Omega' \end{cases}$$

e quindi per il principio di massimo forte segue che $\psi_n > 0$ in Ω'. □

Proposizione 1.3 (Teorema di Courant-Hilbert). *L'n-esima autofunzione ψ_n ha al più n regioni nodali.*

Dimostrazione. Sia $\lambda_n = n-$esimo autovalore in Ω e supponiamo che il dominio Ω sia decomposto in più di n regioni nodali della autofunzione associata ψ_n : $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n+1}, ...$

Definiamo le n funzioni $w_1, w_2, ..., w_n$ tali che w_i coincida a meno di un fattore normalizzante con ψ_n nel sottodominio Ω_i, sia nulla fuori di Ω_i e $\int_\Omega w_i^2 = 1$

Prendiamo la loro combinazione lineare $\varphi = c_1 w_1 + c_2 w_2 + ... + c_n w_n$ che soddisfa essa stessa la condizione di normalizzazione $\int_\Omega \varphi^2 = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 = 1$, ed osserviamo che

$$R(\varphi) = q(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 q(w_i, w_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \left[\int_\Omega |\nabla w_i|^2 - \int_\Omega c(x) w_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_n = \lambda_n$$

Scegliamo i coefficienti c_i in modo che valga anche

$$\int_\Omega \varphi \psi_j = 0 \quad , j = 1, .., n-1$$

se ci restringiamo al dominio $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup, ..., \cup \Omega_n$, allora φ in particolare verifica

$$\varphi \in H_0^1(\Omega')$$

$$\int_{\Omega'} \varphi^2 = \int_{\Omega} \varphi^2 = 1$$

$$\int_{\Omega'} \varphi\psi_j = \int_{\Omega} \varphi\psi_j = 0 \quad , j = 1, .., n-1$$

e quindi, detto $\lambda'_n = n-$esimo autovalore dello stesso operatore ma sul dominio Ω', dalla caratterizzazione variazionale segue che

$$\lambda'_n \leq R(\varphi) = \lambda_n \tag{1.5}$$

ma, essendo $\Omega' \subset \Omega$, allora

$$\lambda'_n \geq \lambda_n \tag{1.6}$$

pertanto da (1.5) e (3.9) segue l'uguaglianza $\lambda'_n = \lambda_n$.

Da ciò segue che per ogni sottodominio di Ω contenente Ω' l'$n-$esimo autovalore coincide con λ_n.

Procediamo in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 1.11 (lì ci siamo occupati del caso $n = 1$, ora lo generalizziamo al caso di n generico). Siano $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, .., \Omega^{(m)}$ un numero arbitrario m di domini contenuti in Ω e contenenti Ω' e siano $\psi_n^{(1)}, \psi_n^{(2)}, .., \psi_n^{(m)}$ le $n-$esime autofunzioni corrispondenti.

Prolunghiamo a zero ciascuna di queste $\psi_n^{(j)}$ fuori dal rispettivo dominio $\Omega^{(j)}$ ottenendo così un sistema di m funzioni linearmente indipendenti $\tilde{\psi}_n^{(j)}$, per ognuna delle quali il valore del coefficiente di Rayleigh è $R(\tilde{\psi}_n^{(j)}) = R(\psi_n^{(j)}) = \lambda_n$.

Ne prendiamo una combinazione lineare non nulla (quindi con γ_i non tutti nulli $i = 1, .., m$):

$$\chi = \gamma_1 \tilde{\psi}_n^{(1)} + .. + \gamma_m \tilde{\psi}_n^{(m)}$$

tale che

$$\int_{\Omega} \chi\psi_i = 0 \qquad , i = 1, .., m-1$$

(esiste e si vede usando per esempio Borsuk-Ulam) e la normalizziamo (cioè $\gamma_1 + .. + \gamma_m = 1$).

Pertanto dalla caratterizzazione variazionale dell'$m-$esimo autovalore, prendendo χ come funzione test, segue che:

$$\lambda_m \leq R(\chi)$$

inoltre un calcolo esplicito dà

$$R(\chi) = \gamma_1 R(\tilde{\psi}_n^{(1)}) + .. + \gamma_m R(\tilde{\psi}_n^{(m)}) = \gamma_1 \lambda_n + .. + \gamma_m \lambda_n = (\gamma_1 + .. + \gamma_m)\lambda_n = \lambda_n$$

quindi

$$\lambda_n \geq \lambda_m$$

che è assurdo in quanto, poichè $\lim_{m\to+\infty} \lambda_m = +\infty$ allora $\lambda_m > \lambda_n$ per m sufficientemente grande. □

Osservazione 1:5. *Da quest'ultimo teorema segue che*
- ψ_1 ha una sola regione nodale (risultato che abbiamo già incontrato in Lemma 1.10)
- ψ_2 ha esattamente due regioni nodali (grazie alla Proposizione 1.1 la quale implica che $\psi_n, n > 1$ ha più di una regione nodale)

Osservazione 1.6. *In [BNV] viene data la seguente definizione generalizzata dell'autovalore principale:*

$$\lambda_1(L, \Omega) \doteq \sup\{\lambda : \textit{ esiste } \phi > 0 \ \textit{ in } \Omega \textit{ tale che } \quad (L + \lambda)\phi \leq 0\}$$

e viene dimostrato che anche con questa definizione continuano a valere le principali proprietà appena viste (in particolare per l'analogo del Teorema 1.12 viene data una versione "rifinita" del principio di massimo debole che generalizza la formulazione classica al caso in cui non si possono dare condizioni al bordo delle funzioni considerate).

Sottolineamo infine che, usando la definizione generalizzata del primo autovalore, è possibile dimostrare anche la seguente condizione sufficiente affinchè valga il principio di massimo debole, che ci sarà utile in seguito:

Teorema 1.14. *Se esiste $g \in C(\overline{\Omega})$, $g > 0 \quad in\ \Omega$, $g \not\equiv 0$ su qualche parte regolare di $\partial\Omega$ t.c. $-\Delta g - c(x)g \geq 0 \quad in\ \Omega$ allora*
vale il principio di massimo debole per $L = \Delta + c(x)$ in Ω