2) FUNZIONI RADIALI

Vogliamo ora analizzare il caso di domini aventi simmetria sferica : palle ,corone,complementi di palle e $\mathbb{R}^N$.

DEFINIZIONE Sia Ω un dominio a simmetria sferica in $\mathbb{R}^N$: $\Omega = \cup_{r\in I} S_r(0)$ con I intervallo contenuto in $[0,\infty)$ e ivi aperto . $H^1_{0\,rad}(\Omega)$ è il sottospazio di $H^1_0(\Omega)$ costituito dalle funzioni radiali, cioè dalle funzioni con rappresentante u ovunque definito con $u(x) = v(|x|)$ per $v:I\to\mathbb{R}$. Se $u\in H^1_0(\Omega)$ è quasi ovunque definita e radiale ove definita (cioè $u(x)= u(y)$ se u è definita in x,y e $|x|=|y|$) è facile vedere che esiste $\tilde{u}\in H^1_{0\,rad}(\Omega)$ quasi ovunque uguale a u: basta porre per z dove u non è definita $u(z)=0$ ad es. se u non è definita in alcun $y\in\Omega$ con $|y|=|z|$, $u(z)=u(y)$ se u è definita in y e $|y|=|z|$.
Dato che la convergenza in H^1 implica la convergenza q.o. per una sottosuccessione, si vede subito che $H^1_{0\,rad}(\Omega)$ è chiuso in $H^1_0(\Omega)$, quindi è uno spazio di Banach .

(2.2) TEOREMA Sia $\Omega = \cup_{r\in I} S_r(0)$ un dominio a simmetria sferica

30 IV

di $\mathbb{R}^N$, $N\geq 2$, e sia $u\in H^1_{o\,rad}(\Omega)$ con $u(x)=v(|x|)$ per $v:I\to\mathbb{R}$ ovunque definita . Allora v è assolutamente continua in ogni intervallo $[a,b]$ contenuto in I tale che $0<a\leq b<\infty$. Inoltre si ha che $\nabla u(x)=v'(|x|)x/|x|$ q.o. ; $r^{(N-1)/2}v(r)$, $r^{(N-1)/2}v'(r)\in L^2(I)$; $v(r)\in H^1([a,\infty)\cap I)$ per ogni $a>0$.

<u>Dimostrazione</u> Basta dimostrare il teorema nel caso di $\Omega=\mathbb{R}^N$, cioè $I=[0,\infty)$ perché se Ω ha simmetria sferica e $u\in H^1_{o\,rad}(\Omega)$ l'estensione banale di u è in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Se $u(x)=v(|x|)$ è in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ sappiamo che è assolutamente continua su quasi ogni retta parallela all'asse N-esimo,quindi $\forall\epsilon>0$ esiste $x'=(x'_1,..,x'_{N-1},0)\in\mathbb{R}^N$ con $|x'|=\delta<\epsilon$ tale che $r\in[0,\infty)\longrightarrow u(x'+re_N)$ (dove e_N è il versore dell'asse N-esimo) è assolutamente continua cioè $r\longrightarrow v((\delta^2+r^2)^{1/2})$ è assolutamente continua (su ogni intervallo compatto in $[0,\infty)$).
Dato che $s\in[\delta,+\infty)\longrightarrow(s^2-\delta^2)^{1/2}$ è assolutamente continua e crescente, la composta $s\longrightarrow v(s)$ è assolutamente continua in $[\delta,+\infty)$ e per l'arbitrarietà di $\epsilon>0$ $v(s)$ è assolutamente continua in $[a,+\infty)$ per ogni $a>0$ e quindi derivabile q.o. con derivata in $L^1([a,b])$ per $0<a<b<\infty$; ne segue che u è continua tranne al piú che in zero e $\nabla u(x)=v'(|x|)x/|x|$ q.o. (le derivate distrib. coincidono q.o. con le deriv. classiche).
Integrando in coordinate polari, essendo $u,|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^N)$,

si vede che $r^{(N-1)/2}v(r)$, $r^{(N-1)/2}v'(r)$ sono in $L^2([0,\infty))$ e quindi (mantenendosi separati da zero) v e v' sono in $L^2([a,\infty))$ per $a>0$ e $v \in H^1([a,\infty))$ per $a>0$ ∎

In particolare sia $I=(r,s)$ con $0<r<s<\infty$, cioè sia Ω una corona (limitata) ; $u(x)=v(|x|)\dashrightarrow v(r)$ definisce un operatore lineare continuo e iniettivo da $H_{o\ rad}^{1}(\Omega)$ a $H_o^1((r,s))$ perché se $|S^{N-1}|$ è la misura $(N-1)$-dimensionale di $S^{N-1} = S$ si ha che $\int_r^s (v^2+v'^2)\,d\rho \le$ $(r^{N-1}|S^{N-1}|)^{-1} \int_r^s \rho^{N-1}(v^2+v'^2)\,d\rho \int_S d\sigma_{N-1} = c\ \|u\|_H$.
Analogamente $L^p((r,s)) \hookrightarrow L^p_{rad}(\Omega)$ e essendo l'immersione di $H^1((r,s))$ in $L^q((r,s))$ compatta per ogni $q\le\infty$ si ottiene il

(2.3) <u>TEOREMA</u> Se $1\le p\le\infty$, $N\ge2$, $0<r<s<\infty$ e $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N : r<|x|<s\}$ allora $H_{(o)\ rad}^{1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con immersione compatta .

Se $\Omega = B_r(0)$ è una palla essendo $H_{o\ rad}^{1}(\Omega)$ un sottospazio di $H^1(\Omega)$ esso è compattamente immerso in $L^p(\Omega)$ per $1\le p<2^*$ se $N\ge3$, per $1\le p<\infty$ se $N=2$. Vogliamo ora discutere una estensione dovuta a Strauss([STRA]) di questo risultato al caso di $N\ge3$, $2<p<2^*$, e $\Omega=\mathbb{R}^N$ oppure $\Omega=(B_r(\overline{0}))^c$; nelle dimostrazioni seguiremo[BER-LI].

(2.4) <u>LEMMA</u> (Radiale) Se $N\ge3$ esistono costanti $\alpha_N, c_N>0$ tali che $\forall\ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ $\quad |U(x)|\le c_N|x|^{(1-N)/2}\ \|u\|$