Capitolo 2

METODO DEL "MOVING PLANES" E PRIMI RISULTATI DI SIMMETRIA

In questo capitolo studieremo proprietà di simmetria e monotonia per soluzioni di problemi ellittici semilineari del tipo:

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) & , \text{ in } \Omega \\ u = g(x) & , \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

in domini limitati di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$

Il metodo utilizzato sarà quello del moving planes. Si tratta di una tecnica ormai classica nello studio di problemi di questo tipo che è stata utilizzata per la prima volta da Alexandroff nei suoi studi sulle superfici a curvatura media costante (si veda [H, cap. 7]) e poi nell'ambito delle equazioni differenziali da Serrin, nell'elegante articolo [S], (si veda la fine del capitolo in cui per completezza abbiamo riportato anche questo risultato).

I primi che utilizzano con successo questo metodo per ottenere un risultato di simmetria di soluzioni di equazioni ellittiche sono Gidas, Ni e Niremberg nel celebre articolo [GNN]. Essi riescono infatti a provare monotonia e, come corollario, simmetria delle soluzioni classiche ($\in C^2(\overline{\Omega})$) di (2.1) nel caso in cui $g = 0$, $u > 0$ $in\,\Omega$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$ nella x ed abbia qualche tipo di monotonia nella variabile x, ed Ω sia un

dominio simmetrico rispetto ad un certo iperpiano, convesso nella direzione ortogonale a tale iperpiano e avente $\partial\Omega$ regolare (si veda in particolare [GNN, Corollario 1, pag. 227]).
Il loro è quindi essenzialmente un risultato di monotonia e si basa, per utilizzare la tecnica del moving planes, sull'uso dei Principi di Massimo.
Successivamente sono state fatte numerose estensioni e generalizzazioni di questo risultato, in particolare Berestycki e Niremberg in [BN1] hanno migliorato il metodo utilizzando il Principio di Massimo in Domini Piccoli (che permette di superare le difficoltà dovute ad una eventuale frontiera non regolare dei domini in considerazione e di considerare quindi anche domini Ω con bordo non regolare) e dimostrato simmetria delle soluzioni forti $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

In questo capitolo riporteremo sostanzialmente i risultati ottenuti in [GNN] e [BN1] ma considereremo soluzioni deboli (il principio di massimo in domini piccoli da noi utilizzato vale anche per soluzioni deboli), tuttavia per non appesantire troppo le dimostrazioni supporremo sempre che $u \in C(\overline{\Omega})$; anche tale ipotesi di continuità fino al bordo potrebbe tuttavia essere sostituita con l'ipotesi $u \in L^{\infty}(\Omega)$ (si veda [D]).
Studieremo quindi la simmetria delle soluzioni deboli $u \in H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema:

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

per un aperto limitato opportuno $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$
dove f è una funzione sufficientemente regolare con opportune proprietà di monotonia-simmetria.

2.1 Descrizione del metodo

Cominciamo con alcune notazioni e con la **descrizione geometrica del metodo**:

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ un dominio limitato qualunque (non facciamo alcuna ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$)

per $\lambda = \tilde{\lambda}$ sufficientemente grande l'iperpiano

$$T(\lambda) \doteq \{x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}$$

è disgiunto da $\overline{\Omega}$
Muovendo con continuità il piano $T(\lambda)$ verso Ω, spostandolo parallelamente (cioè facendo decrescere λ) ad un certo punto $T(\lambda)$ intersecherà $\overline{\Omega}$ e possiamo definire

$$a \doteq \sup\{x_1 : \overset{\exists x}{\cancel{x}} = (x_1, y) \in \Omega\}$$

da questo momento in poi ad ogni passo il piano $T(\lambda)$ taglia in Ω una calotta aperta

$$\Sigma(\lambda) \doteq \{x = (x_1, y) \in \Omega : x_1 > \lambda\}$$

Definiamo

$$P_\lambda x \doteq (2\lambda - x_1, y)$$

il simmetrico di $x = (x_1, y)$ rispetto al piano $T(\lambda)$
infine definiamo (a patto che l'insieme $\{\lambda : P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega\}$ sia non vuoto)

$$\lambda_0 \doteq \overset{\mathrm{inf}}{\cancel{\min}}\{\lambda : P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega\}$$

e chiamiamo *calotta massimale* il sottodominio $\Sigma_0 \doteq \Sigma(\lambda_0)$
mentre $T_0 \doteq T(\lambda_0)$ è detto *iperpiano massimale.*

Premettiamo alcune utili **osservazioni**:

Osservazione 2.1.

- *se $\partial\Omega$ è regolare allora*

  inizialmente $P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega$ e vi resta almeno fino a quando non accade una delle seguenti cose:

  (i) *$P_\lambda\Sigma(\lambda)$ diventa internamente tangente a $\partial\Omega$ in un punto $P \notin T(\lambda)$*

  (ii) *$T(\lambda)$ assume una posizione in cui è ortogonale a $\partial\Omega$ in un punto Q*

  detto λ_1 il primo valore di λ per il quale avviene (i) o (ii) (ovviamente $P_{\lambda_1}\Sigma(\lambda_1) \subseteq \Omega$)allora in generale $\lambda_0 \leq \lambda_1$ ed inoltre anche il valore massimale λ_0 verifica (i) o (ii).

- *se $\partial\Omega$ non è regolare allora*

  non è in generale vero che $P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega$ neppure inizialmente (cioè l'insieme $\{\lambda : P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega\}$ potrebbe essere vuoto)
  quindi per poter far partire il metodo occorrerà fare la richiesta

  $$\exists\,\lambda^* \quad t.c. \quad P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega \quad per\ \lambda^* < \lambda < a$$

  e non si può affermare neppure che ad un certo punto debbano necessariamente verificarsi (i) o (ii).

Osserviamo infine che in entrambi i casi:

Osservazione 2.2. *Se Ω è convesso nella direzione di x_1 (cioè se $\forall y \in \mathbb{R}^{N-1}$ l'insieme $\{x_1 \in \mathbb{R} : (x_1, y) \in \Omega\}$ o è vuoto o è un intervallo aperto) e $P_{\lambda^*}\Sigma(\lambda^*) \subseteq \Omega$ per un certo λ^*, allora*
$P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega$ per $\lambda^* \leq \lambda < a$
(ma può accadere che $\Sigma(\lambda^*)$ non sia la calotta massimale)

e in particolare:

Se Ω è convesso nella direzione di x_1 e simmetrico rispetto a $T(\lambda^*)$ per un certo λ^* allora
$P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega$ per $\lambda^* \leq \lambda < a$ e
$\Sigma(\lambda^*) = \Sigma_0$ è la calotta massimale.

2.2 Risultato di simmetria di Gidas, Ni e Niremberg

Il primo dei risultati che presentiamo e da cui discendono tutti i successivi, è valido per ogni calotta $\Sigma(\lambda^*)$ contenuta nella calotta massimale:

Lemma 2.1.

$$\begin{array}{l} \textit{Sia } \Omega \subset \mathbb{R}^N \textit{ un dominio limitato qualunque tale che} \\ \exists\lambda^* \textit{ tale che } T(\lambda^*) \textit{ interseca } \Omega \textit{ e } P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega \textit{ per } \lambda^* < \lambda < a \end{array} \tag{2.3}$$

Sia $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f(x,u) \qquad \text{in } \Omega \tag{2.4}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \tag{2.5}$$

$$u > 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{2.6}$$

dove $f = f(x,s) : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica:*

- $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ *e localmente lipschitziana in* s *uniformemente in* x
- f *monotona decrescente in* x_1*, per* $x = (x_1, y) \in \Omega$*:*
  $f(x_1, y, s) \leq f(x_1', y, s) \qquad$ *, per* $x_1' < x_1$*;*

allora

$$\forall\, \lambda > \lambda^* \quad \text{si ha che} \quad u(P_\lambda x) > u(x) \qquad \forall x \in \Sigma(\lambda) \tag{2.7}$$

pertanto:

(i) u *è strettamente monotona decrescente in* x_1*, per* $x = (x_1, y) \in \Sigma(\lambda^*)$ *e anzi*

$u_{x_1}(x) < 0 \qquad , \forall x \in \Sigma(\lambda^*)$

(ii) $u(P_{\lambda^*} x) \geq u(x) \qquad , \forall x \in \Sigma(\lambda^*)$

Osservazione 2.3. *Per quanto già osservato (Osservazione 2.2) possiamo anche sostituire l'ipotesi (2.3) del Lemma precedente con quella meno generale:*

$$\begin{aligned} &\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ dominio limitato, convesso nella direzione di } x_1 \\ &\text{e tale che } P_{\lambda^*}\Sigma(\lambda^*) \subseteq \Omega \text{ per un certo } \lambda^* \end{aligned} \tag{2.8}$$

Osservazione 2.4. *Per quanto riguarda l'ipotesi di monotonia fatta sulla* f*, come vedremo dalla dimostrazione basterebbe in realtà richiedere che*

$$f(P_\lambda x, s) \geq f(x,s) \qquad \forall x \in \Sigma(\lambda), \forall \lambda > \lambda^*$$

tuttavia questa seconda ipotesi, pur essendo meno restrittiva (per esempio implica monotonia della f *nella sola calotta* $\Sigma(\lambda^*)$ *e non in tutto* Ω*), ha lo svantaggio di non essere agevolmente verificabile.*

Osservazione 2.5. *La derivata che compare nella tesi (ii) è una derivata in senso classico, infatti, essendo* Ω *limitato,* $u \in C(\overline{\Omega}) \subseteq L^\infty(\Omega)$*, ed* $f(x,s)$ *continua in entrambe le variabili, allora* $f(x,u(x)) \in L^\infty(\Omega)$ *e dai risultati di regolarità locale segue che* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. La dimostrazione che presentiamo è quella dedotta dall'articolo [BN1] di Berestycki e Niremberg. L'idea consiste nel confrontare i valori della soluzione dell'equazione in due punti distinti che sono l'uno il riflesso dell'altro rispetto ad un certo iperpiano di partenza sfruttando i principi di massimo (in particolare quello del Massimo in Domini Piccoli), e poi nel muovere l'iperpiano fino alla posizione critica $T(\lambda^*)$.

Sia $\lambda \in (\lambda^*, a)$, definiamo

$$\begin{aligned} v_\lambda(x) &\doteq u(P_\lambda x) \qquad , x \in \Sigma(\lambda) \\ w_\lambda(x) &\doteq v_\lambda(x) - u(x) = u(P_\lambda x) - u(x) \qquad , x \in \Sigma(\lambda) \end{aligned}$$

Vogliamo quindi dimostrare che

$$w_\lambda(x) > 0 \qquad , x \in \Sigma(\lambda)$$

innanzitutto osserviamo che w_λ verifica (debolmente)

$$-\triangle w_\lambda - c_\lambda(x) w_\lambda \geq 0 \qquad \text{in } \Sigma(\lambda) \tag{2.9}$$

con $c_\lambda \in L^\infty(\Sigma(\lambda))$, infatti, se $x \in \Sigma(\lambda)$, allora, grazie all'ipotesi di monotonia su f

$$\begin{aligned} -\triangle w_\lambda(x) &= -\triangle v_\lambda(x) + \triangle u(x) = f(P_\lambda x, u(P_\lambda x)) - f(x, u(x)) \geq \\ &\geq f(x, u(P_\lambda x)) - f(x, u(x)) = c_\lambda(x)\left[u(P_\lambda x) - u(x)\right] = \\ &= c_\lambda(x) w_\lambda(x) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$c_\lambda(x) \doteq \begin{cases} \frac{f(x,u(P_\lambda x)) - f(x,u(x))}{u(P_\lambda x) - u(x)} & , \text{ se } u(P_\lambda x) \neq u(x) \\ 0 & , \text{ se } u(P_\lambda x) = u(x) \end{cases}$$

e $c_\lambda \in L^\infty(\Sigma(\lambda))$ grazie all'ipotesi di locale lipschitzianità in s uniforme in x.

Inoltre

$$w_\lambda^- \in W_0^{1,2}(\Sigma(\lambda)) \tag{2.10}$$

infatti

$w_\lambda \in C(\overline{\Sigma(\lambda)})$
$w_\lambda \geq 0$ su $\partial\Sigma(\lambda)$
$w_\lambda \in W^{1,2}(\Sigma(\lambda))$

Sia ora $\lambda < a$, ma sufficientemente vicino ad a, in modo da poter utilizzare il Principio di Massimo in Domini Piccoli per l'operatore $\Delta + c_\lambda(x)$ in $\Sigma(\lambda)$(Teorema 1.3), segue quindi che $w_\lambda \geq 0$ su $\Sigma(\lambda)$; inoltre $w_\lambda \not\equiv 0$ su ogni componenete connessa di $\Sigma(\lambda)$, infatti, se $x \in \partial\Sigma(\lambda) \setminus T(\lambda)$, allora $w_\lambda(x) = u(P_\lambda x) > 0$ grazie all'ipotesi (2.6), e quindi, essendo $u \in C(\overline{\Omega})$ per ipotesi, $w_\lambda(x) > 0$ in un intorno di x contenuto in Ω.
Ma allora per il Principio di Massimo Forte (Teorema 1.1) segue che

$$w_\lambda > 0 \qquad \text{in } \Sigma(\lambda)$$

Sia $\mu \doteq \inf\{\ \lambda < a \ \mid \ w_\xi > 0 \text{ in } \Sigma(\xi) \quad , \forall \xi \in (\lambda, a)\}$
Se mostriamo che $\mu \leq \lambda^*$, avremo in particolare che $w_\lambda > 0$ su $\Sigma(\lambda)$, per $\lambda > \lambda^* \geq \mu$, ossia la tesi
(osserviamo che $\mu < \lambda^*$ ha senso solo se $\Sigma(\lambda^*)$ non coincide con la calotta massimale Σ_0, in tal caso infatti $P_\lambda\Sigma(\lambda) \not\subseteq \Omega$, e quindi w_λ non è ben definita, $\forall\lambda < \lambda^*$).

Supponiamo per assurdo che $\mu > \lambda^*$.
Osserviamo innanzitutto che da tale ipotesi segue

$$w_\mu > 0 \text{ su } \Sigma(\mu) \tag{2.11}$$

come conseguenza del Principio del Massimo Forte. Infatti, sia $\lambda_n \longrightarrow \mu$ una successione minimizzante, allora $P_{\lambda_n}x \longrightarrow P_\mu x$ e per la continuità di u anche $w_{\lambda_n}(x) \longrightarrow w_\mu(x)$, inoltre $x \in \Sigma(\mu) \Rightarrow x \in \Sigma(\lambda_n)$ definitivamente, pertanto segue che $w_\mu \geq 0$ su $\Sigma(\mu)$.

Inoltre $w_\mu \not\equiv 0$ su ogni componenete connessa di $\Sigma(\mu)$ (basta ripetere lo stesso ragionamento visto per $\lambda \sim a$, ancora valido in quanto $\mu > \lambda^* \Rightarrow P_\mu\Sigma(\mu) \subseteq \Omega$ e quindi $\exists x \in \partial\Sigma(\mu) \setminus T(\mu)$ tale che $w_\mu(x) = u(P_\mu x) > 0$).

Sia ε positivo sufficientemente piccolo tale che $\mu - \varepsilon > \lambda^*$

(quindi $P_{\mu-\varepsilon}\Sigma(\mu - \varepsilon) \subseteq \Omega$ e perciò è lecito considerare $w_{\mu-\varepsilon}$)

Mostriamo che

$$w_{\mu-\varepsilon}(x) > 0 \quad \text{su } \Sigma(\mu - \varepsilon) \tag{2.12}$$

ciò contraddice la definizione di μ e conclude la dimostrazione.

Sia $\delta = \delta(N, \|c_{\mu-\varepsilon}\|_{L^\infty(\Sigma(\mu-\varepsilon))})$ tale che valga il Principio di Massimo Debole per l'operatore $\Delta + c_{\mu-\varepsilon}(x)$ in ogni sottodominio D di $\Sigma(\mu - \varepsilon)$ di misura minore di δ (Teorema 1.3-Principio di Massimo Debole in Domini Piccoli).

Sia $K \subset \Sigma(\mu)$ un chiuso tale che $|\Sigma(\mu) \setminus K| < \frac{\delta}{2}$; essendo K un sottoinsieme compatto di $\Sigma(\mu)$ e grazie alla (2.11), segue che $\exists \eta > 0 \quad : \quad w_\mu(x) \geq \eta > 0, \quad \forall x \in K$ e quindi per la continuità di u che

$$w_{\mu-\varepsilon}(x) \geq \frac{\eta}{2} > 0 \quad , \forall x \in K \tag{2.13}$$

Inoltre, se considero l'insieme $\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K$, allora, per ε sufficientemente piccolo $|\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K| < \delta$; dalla (2.9) segue poi che $-\Delta w_{\mu-\varepsilon} - c_{\mu-\varepsilon}(x) w_{\mu-\varepsilon} \geq 0$ in $\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K$, ed infine si verifica facilmente grazie alla (2.13) che $w^-_{\mu-\varepsilon} \in H^1_0(\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K)$.

Prin. max. domini piccoli

Applicando quindi il Teorema 1.3 segue che $w_{\mu-\varepsilon} \geq 0$ su $\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K$ e inoltre $w_{\mu-\varepsilon} \not\equiv 0$ su ogni componenete connessa di $\Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K$ (si vede nel solito modo, essendo $\mu - \varepsilon > \lambda^*$). Ma allora, applicando il Principio di Massimo Forte

$$w_{\mu-\varepsilon}(x) > 0 \quad , \forall x \in \Sigma(\mu - \varepsilon) \setminus K \tag{2.14}$$

La (2.12) segue quindi da (2.13) e (2.14).

A questo punto è facile quindi ottenere **(i)** e **(ii)** dalla (2.7) appena dimostrata:

(i) Siano $x = (x_1, y), x' = (x'_1, y)$, tali che $\lambda^* < x_1 < x'_1$ allora, prendendo $\lambda \doteq \frac{x_1 + x'_1}{2} > \lambda^*$ si ha che $P_\lambda x' = x$ e quindi la stretta monotonia decrescente segue dalla (2.7).

Sia ora $x \in \Sigma(\lambda^*)$, allora $\exists \lambda > \lambda^*$ tali che $x \in T(\lambda) \cap \Omega$

e abbiamo visto che w_λ verifica

$$-\Delta w_\lambda - c_\lambda(x)w_\lambda \geq 0 \text{ in } \Sigma(\lambda)$$
$$w_\lambda > 0 \text{ in } \Sigma(\lambda)$$

in più per definizione $w_\lambda = 0$ in $T(\lambda) \cap \Omega$
Applicando il Lemma di Hopf segue quindi che

$$0 < \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1}(x) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)$$

Osserviamo che possiamo applicare il Lemma di Hopf in quanto $\partial\Sigma(\lambda)$ è regolare in un intorno di $x \in T(\lambda) \cap \Omega$ ed inoltre, dai risultati di regolarità (si veda Osservazione 2.5) segue che $w_\lambda \in C^1$ fino ad x.

(ii) Basta passare al limite per $\lambda \longrightarrow \lambda^*$ nella (2.7) , sfruttare la continuità di u ed osservare che se $x \in \Sigma(\lambda^*)$ allora $x \in \Sigma(\lambda)$ per λ sufficientemente vicino a λ^*.

□

In particolare il Lemma 2.1 implica un risultato di monotonia nella calotta massimale Σ_0:

Teorema 2.1 (Monotonia nella calotta massimale Σ_0). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato verificante l'ipotesi (2.3) oppure (2.8).*

Sia $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

dove $f = f(x,s) : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica:

- *$f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ e localmente lipschitziana in s uniformemente in x*
- *f monotona decrescente in x_1, per $x = (x_1, y) \in \Omega$*
  $f(x_1, y, s) \leq f(x_1', y, s) \quad$ *, per $x_1' < x_1$.*

Allora

(i) *u e strettamente monotona decrescente in x_1, per $x = (x_1, y) \in \Sigma_0$ e anzi*

$u_{x_1}(x) < 0 \qquad , \forall x \in \Sigma_0$

(ii) $u(P_{\lambda^*}x) \geq u(x) \qquad , \forall x \in \Sigma_0$

Se infine aggiungiamo delle ipotesi di simmetria sull'insieme Ω e sul dato f, otteniamo come conseguenza della monotonia nella calotta massimale il seguente risultato di simmetria (che è una versione un po' più generale di quello dato da [GNN]):

Corollario 2.1 (Simmetria rispetto all'iperpiano massimale T_0). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, convesso nella direzione di x_1 e simmetrico rispetto ad un certo iperpiano $T(\lambda^*)$ (quindi per quanto già osservato $\lambda^* = \lambda_0$ massimale).*

Sia $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \partial\Omega \\ u > 0 & in\ \Omega \end{cases}$$

dove $f = f(x,s) : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica:

- *$f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ e localmente lipschitziana in s uniformemente in x*
- *f monotona decrescente in x_1, per $x = (x_1, y) \in \Sigma_0$ (= calotta massimale)*
  $f(x_1, y, s) \leq f(x_1', y, s) \quad$ *, per $x_1' < x_1$, $x_1, x_1' > \lambda^* = \lambda_0$*
- *f simmetrica in x rispetto a T_0 :*
  $f(P_{\lambda_0}x, s) = f(x,s)$

allora

u è simmetrica rispetto all'iperpiano massimale T_0:

$$u(P_{\lambda_0}x) = u(x)$$

ed inoltre (stretta decrescenza) $u_{x_1} < 0$ per $x = (x_1, y) \in \Sigma_0$

Dimostrazione. A meno di traslazioni dell'asse y del sistema di riferimento $(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$, possiamo suppore che $\lambda_0 = 0$, dal Teorema 2.1 segue quindi:

$$u_{x_1}(x) < 0 \qquad , \forall x = (x_1, y) \in \Omega, x_1 > 0$$

$$u(-x_1, y) \geq u(x_1, y) \qquad , \forall x = (x_1, y) \in \Omega, x_1 > 0$$

Per ottenere la tesi basta cambiare sistema di riferimento prendendo

$$x_1' = -x_1$$
$$y' = y$$

ed applicare nuovamente il Teorema 2.1 (possiamo grazie alle ipotesi fatte su Ω e su f). □

Osservazione 2.6. *Potrebbe sembrare che le ipotesi di simmetria e convessità ora fatte su Ω siano più restrittive di quelle di:*

esistenza di $T(\lambda^*)$ tale che $P_\lambda\Sigma(\lambda) \subseteq \Omega \quad , \lambda^* < \lambda < a$ (la (2.3))

e simmetria rispetto a $T(\lambda^*)$

tuttavia si può vedere facilmente che le due ipotesi in tal caso (in cui c'è anche simmetria rispetto a T_0) sono esattamente equivalenti.

Osservazione 2.7. *Ancora una volta osserviamo che per quanto riguarda le ipotesi sulla f, dalla dimostrazione fatta si potrebbe richiedere:*

$$f(P_\lambda x, s) \geq f(x,s) \quad \forall x \in \Sigma(\lambda),\ \forall \lambda > \lambda^* \text{ e } f \text{ simmetrica rispetto a } T(\lambda^*)$$

tuttavia si verifica facilmente che questa volta, grazie all'aggiunta della simmetria, questa richiesta è del tutto equivalente a quella fatta:

f monotona decrescente in x_1, per $x = (x_1, y) \in \Sigma(\lambda^*)$ e f simmetrica rispetto a $T(\lambda^*)$

Osservazione 2.8. *La richiesta di simmetria dell'insieme è una condizione necessaria per la simmetria della soluzione (grazie alle ipotesi $u = 0$ su $\partial\Omega$, $u > 0$ in Ω).*

Come conseguenza di tale risultato si ottiene che se Ω è una palla $B_R(0)$ e f è radiale in x e decrescente rispetto a $|x|$, allora ogni soluzione di (2.2) è radiale e strettamente decrescente in funzione della coordinata radiale:

Corollario 2.2 (Simmetria radiale). *Sia $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$*
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

dove $f = f(t,s) : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è:

- *continua in t, localmente lipschitziana in s uniformemente in t;*
- *decrescente in t.*

Allora

$$u = u(r)$$

$$e\ u_r < 0\ ,\ \text{per } 0 < r < R$$

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 2.1 in ogni direzione (possiamo grazie alle ipotesi fatte su Ω e su f).

Mostriamo che u è radiale:

siano $x, \bar{x} \in \Omega$ tali che $|x| = |\bar{x}| = r$ allora, esiste una retta di direzione opportuna passante per l'origine tale che x e $\bar{x}$ sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto a tale retta, pertanto, a patto di scegliere un opportuno sistema di riferimento (x_1, y), si ha che $x = (x_1, y), \bar{x} = (-x_1, y)$ e quindi, applicando il Corollario 2.1 segue che $u(x) = u(\bar{x})$.

Mostriamo che $u = u(r)$ è strettamente monotona decrescente:

basta osservare che, scegliendo come asse x_1 del sistema di riferimento una qualunque retta passante per l'origine, il Corollario 2.1 ci assicura che $u_{x_1} < 0 \quad \forall x_1 > 0$. □

2.3 Controesempi

Vediamo alcuni esempi in cui non sono verificate le ipotesi del teorema di simmetria (precisamente dei Corollari 2.1 e 2.2) e per i quali si ha in effetti una perdita (almeno parziale) della simmetria delle soluzioni.

Esempio 2.1. *Il primo di questi esempi è tratto da [GNN], in esso rimpiazziamo la condizione $u > 0$ in Ω con quella*

$$u \geq 0 \qquad in\,\Omega, \qquad u \not\equiv 0 \qquad in\,\Omega$$

e indeboliamo inoltre anche la condizione di lipshitzianità per f prendendo

$$f = f(u) \qquad solo\ hoelder\ continua, \qquad f(0) \geq 0$$

Premettiamo infatti la seguente

Osservazione 2.9. *Se u è soluzione di una equazione non lineare*

$$\begin{matrix} u \geq 0 & in\ \Omega \\ u \not\equiv 0 & in\ \Omega \end{matrix} \qquad \not\Rightarrow \qquad u > 0 \ \ in\,\Omega$$

tuttavia nel caso semilineare : $-\Delta u = f(x, u)$ con f localmente lipschitziana in u unif. in x e $f(x, 0) \geq 0\ \forall x \in \Omega$ allora

$$\begin{matrix} u \geq 0 & in\ \Omega \\ u \not\equiv 0 & in\,\Omega \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad u > 0 \ \ in\,\Omega$$

infatti:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x,0) &= -\Delta u - f(x,u) + f(x,0) \\ &= -\Delta u - c(x)(u-0) \end{aligned}$$

dove

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f(x,u)-f(x,0)}{u-0} & , \ se \ u \neq 0 \\ 0 & , \ se \ u = 0 \end{cases}$$

e $c(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ *per la lipschitzianità di* f
e possiamo quindi utilizzare il principio di massimo forte.

Tornando quindi al nostro esempio:

$\Omega = B(0,1), p > 2$

$$w(x) = \begin{cases} (1- \mid x \mid^2)^p & , \ se \ \mid x \mid \leq 1 \\ 0 & , se \ \mid x \mid > 1 \end{cases}$$

esso verifica

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) & , \ in \ \Omega \\ w = 0 & , \ su \ \partial\Omega \end{cases}$$

con

$$f(w) = -2p(p-2)w^{1-\frac{2}{p}} + 2p(N+2p-2)w^{1-\frac{1}{p}}$$

($f(0) = 0$ e f è holder continua con esponente $1 - \frac{2}{p}$)

$$u(x) \doteq w(x) + w(x - x_0)$$

per un certo x_0 fissato t.c. $|x_0| = 3$, verifica

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & , \ in \ B(0,5) \\ u = 0 & , \ su \ \partial B(0,5) \end{cases}$$

con la stessa f ed ovviamente non è radiale.

Esempio 2.2. *Eliminiamo ora del tutto l'ipotesi* $u > 0$ *in* Ω *considerando il caso di soluzioni che cambiano segno:*

sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato
simmetrico rispetto a $x_1 = 0$ e convesso nella direzione di x_1
definiamo: $\Omega^+ \doteq \Omega \cap \{x_1 > 0\}$ e $\Omega^- \doteq \Omega \cap \{x_1 < 0\}$
e chiamiamo: $\mu_1^- = \lambda_1(\Delta, \Omega^-)$ e $\varphi_1 =$ autofunzione relativa a μ_1^- con condizione di Dirichlet omogenea (ricordiamo che $\varphi_1 > 0$)
consideriamo la riflessione dispari di φ_1:

$$u(x) \doteq \begin{cases} \varphi_1(x) & , \text{ se } x \in \Omega^- \\ -\varphi_1(-x_1, .., x_N) & , \text{ se } x \in \Omega^+ \end{cases}$$

essa verifica

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = -\Delta\varphi_1(x)\chi_{\Omega^-}(x) + \Delta\varphi_1(-x_1, .., x_N)\chi_{\Omega^+}(x) = \\ & = -\mu_1^-\varphi_1(x)\chi_{\Omega^-}(x) + \mu_1^-\varphi_1(-x_1, .., x_N)\chi_{\Omega^+}(x) = \\ & = -\mu_1^- u(x) \qquad , \text{ se } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \qquad , \text{ se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove $f(x, s) = -\mu_1^- s$ verifica tutte le ipotesi del Corollario 2.1
e $u(x)$ non è simmetrica rispetto a $\{x_1 = 0\}$.

Esempio 2.3. *Analizziamo un caso in cui Ω non è convesso.*
Se Ω è un anello [BN2] hanno infatti dato il seguente esempio di nonlinearità quasi "critica" (nel senso delle immersioni degli spazi di Sobolev) che dà origine a soluzioni nonsimmetriche.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & , \text{ in } \Omega \\ u > 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = 0 & , \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio limitato, $N \geq 4$
e $p = \frac{N+2}{N-2}$ ($p + 1 = 2^* = \frac{2N}{N-2} =$ esponente di Sobolev critico).

In [BN2] viene dimostrato innanzitutto che per $\lambda \in (0, \lambda_1)$ si ha esistenza di soluzione per (2.15).

Essi procedono cercando punti critici del funzionale

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

sulla sfera $\{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1\}$; pur essendo $p+1$ l'esponente critico e quindi non essendo compatta l'immersione di Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, riescono a dimostrare in particolare che

$$\mathcal{S}_\lambda \doteq \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}} \left\{ \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} \tag{2.16}$$

è raggiunto per $\lambda > 0$ da una funzione v che possiamo assumere essere ≥ 0 (a patto di rimpiazzarla con $|v|$). Quindi v verifica

$$-\Delta v - \lambda v = \mu v^p \qquad su\ \Omega$$

($\mu = \mathcal{S}_\lambda$ moltiplicatore di Lagrange)
e se $\lambda < \lambda_1$ allora $\mu = \mathcal{S}_\lambda > 0$, quindi riscalando otteniamo, per una costante $k > 0$ opportuna ($k = \mathcal{S}_\lambda^{\frac{1}{p-1}}$), una funzione $u = kv$ soluzione di (2.15) ($v > 0$ per il principio di massimo forte).

A questo punto osserviamo che

$$\mathcal{S}_O \doteq \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}} \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

corrisponde alla migliore costante C dell'immersione di Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1=2^*}(\Omega) \qquad , p = \frac{N+2}{N-2}$$

$$C\|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e ricordiamo che se fosse $p < \frac{N+2}{N-2}$ allora tale immersione sarebbe compatta e quindi $\mathcal{S}_O$ sarebbe raggiunto; nel nostro caso $p = \frac{N+2}{N-2}$ invece, quindi non solo l'immersione non è compatta, ma inoltre $\mathcal{S}_O$ non è mai raggiunto se Ω è un dominio limitato. Infatti, supponiamo che $\mathcal{S}_O$ sia assunto da una funzione $v \in H_0^1(\Omega)$, possiamo assumere $v \geq 0$ in Ω (altrimenti sostituiamo v con $|v|$); fissiamo una palla $B \supset \Omega$ e consideriamo

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{su } \Omega \\ 0 & \text{su } B \setminus \Omega \end{cases}$$

così $\mathcal{S}_O$ è assunto anche su B da $\tilde{v}$ e $\tilde{v}$ verifica $-\Delta\tilde{v} = \mu\tilde{v}^p$ su B per una certa costante $\mu > 0$ e questo è assurdo in quanto sfruttando l'identità di Pohozaev è facile dimostrare che il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } B \\ u > 0 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B \end{cases}$$

con $p = \frac{N+2}{N-2}$, non ammette soluzione.

Sia ora Ω un anello e consideriamo

$$\mathcal{Z}_\lambda \doteq \inf_{\substack{v \in H^1_{0,r}(\Omega) \\ \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}} \left\{ \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

dove $H^1_{0,r}(\Omega) = \{u \in H^1_0(\Omega), \text{ radiali } \}$

Grazie al fatto che, nel caso di un anello l'immersione di Sobolev

$$H^1_{0,r}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1=2^*}(\Omega) \qquad , p = \frac{N+2}{N-2}$$

è compatta [1], segue che $\mathcal{Z}_\lambda$ è raggiunto $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ da una funzione v_r (radiale) che possiamo assumere essere ≥ 0 (a patto di rimpiazzarla con $|v_r|$).
Quindi v_r verifica

$$-\Delta v_r - \lambda v_r = \mu v_r^p \qquad su\ \Omega$$

($\mu = \mathcal{Z}_\lambda$ moltiplicatore di Lagrange)
e se $\lambda < \lambda_1$ allora $\mu = \mathcal{Z}_\lambda > 0$, quindi riscalando otteniamo, per $k > 0$ opportuna ($k = \mathcal{Z}_\lambda^{\frac{1}{p-1}}$), una funzione (radiale) $u_r = kv_r$ soluzione di (2.15) ($v_r > 0$ per il principio di massimo forte).

A questo punto mostriamo che per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo

$$\mathcal{S}_\lambda < \mathcal{Z}_\lambda \qquad (\mathcal{S}_\lambda \text{ definito in } (2.16))$$

il che implica che $\mathcal{S}_\lambda$ è raggiunto da funzioni non radiali e che quindi esistono delle soluzioni non radiali.

Dimostrazione. per $\lambda = 0$ da quanto detto fino ad ora si ha:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_O & \text{non è raggiunto} \\ \mathcal{Z}_O & \text{è raggiunto} \end{array}$$

quindi

$$\mathcal{S}_O < \mathcal{Z}_O$$

inoltre si verifica facilmente che le funzioni $\lambda \mapsto \mathcal{S}_\lambda$ e $\lambda \mapsto \mathcal{Z}_\lambda$ sono continue, quindi, per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo

$$\mathcal{S}_\lambda < \mathcal{Z}_\lambda$$

e sono entrambi raggiunti ($\lambda < \lambda_1$) □

[1] Si veda l'Appendice

In conclusione abbiamo mostrato che se Ω è un anello il problema (2.15) ammette sia soluzioni radiali che non radiali per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo, cosa che non contraddice il risultato di simmetria sferica (Corollario ??) in quanto l'anello non è un insieme convesso in alcuna direzione.

Esempio 2.4. *Trattiamo ora un caso in cui f non possiede la giusta monotonia.*

Consideriamo

$$f(x,u) = f(|x|,u) = |x|^\alpha u^p$$

con $\alpha > 0$ e $p+1$ superquadratico e sottocritico :

$$\begin{cases} 1 < p < +\infty & \text{se } N = 2 \\ 1 < p < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2} & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

poichè il peso $|x|^\alpha$ davanti alla nonlinearità è crescente, si tratta di un caso in cui non è applicabile il teorema di simmetria.
L'equazione corrispondente $-\Delta u = |x|^\alpha u^p$ è detta equazione di Hénon.
Consideriamo quindi il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha u^p & in \quad \Omega \\ u > 0 & in \quad \Omega \\ u = 0 & su \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

dove $\Omega =$ palla di $\mathbb{R}^N$
In [SSW] viene dimostrato che per α opportuni esistono soluzioni non simmetriche di (2.17).
Essi procedono in modo simile a quanto fatto da Brezis-Niremberg nell'esempio precedente.

Innanzitutto dimostriamo esistenza di soluzione mediante un procedimento di minimizzazione vincolata, definiamo

$$\mathcal{S}_\alpha \doteq \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |v|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \qquad , \alpha \geq 0$$

Grazie al fatto che, essendo $p+1$ sottocritico, l'immersione di Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$$

è compatta (ciò implica che $u \mapsto \left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ è continua rispetto alla convergenza debole in $H_0^1(\Omega)$), segue che $\mathcal{S}_\alpha$ è raggiunto da una funzione v che possiamo

assumere essere ≥ 0 (a patto di rimpiazzarla con $|v|$).
Quindi v verifica

$$-\Delta v = \mu |x|^{\alpha} v^{p} \qquad su\ \Omega$$

($\mu = \mathcal{S}_\alpha$ moltiplicatore di Lagrange)
inoltre $\mu = \mathcal{S}_\alpha > 0$, quindi riscalando otteniamo, per $k > 0$ opportuna ($k = \mathcal{S}_\alpha^{\frac{1}{p-1}}$), una funzione $u = kv$ soluzione di (2.17) ($v > 0$ per il principio di massimo forte) che è detta soluzione di ground state.

Consideriamo quindi:

$$\mathcal{Z}_\alpha \doteq \inf_{\substack{v \in H^1_{0,r}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |v|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \qquad , \alpha \geq 0$$

Anche in questo caso (ancora usando il fatto che l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, $p+1$ sottocritico, è compatta e $H^1_{0,r}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$) è facile verificare che $\mathcal{Z}_\alpha$ è raggiunto da una funzione v_r (radiale) che possiamo assumere essere ≥ 0 (a patto di rimpiazzarla con $|v_r|$).
Quindi procedendo come al solito e riscalando opportunamente otteniamo una funzione (radiale) u_r soluzione di (2.17).

A questo punto in [SSW] viene dimostrato il seguente

Teorema 2.2.

$$\exists \quad \alpha^* > 0 \qquad t.c. \qquad \forall\, \alpha > \alpha^* \qquad si \quad ha \qquad\qquad \mathcal{S}_\alpha < \mathcal{Z}_\alpha$$

da cui segue quindi che per $\alpha > \alpha^*$ il problema (2.17) ammette soluzioni non radiali.

2.4 Simmetria per un problema sovradeterminato

Concludiamo questa sezione con il risultato ottenuto da Serrin in [S]. Egli considerando soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine soddisfacenti condizioni al bordo sovradeterminate, fa uso proprio della tecnica di spostamento dei piani per dimostrare che il dominio su cui la soluzione è definita è necessariamente una palla e che la soluzione è a simmetria sferica. Si tratta di una delle prime applicazioni del metodo del moving planes e, data la semplicità della dimostrazione, la riportiamo per completezza. Osserviamo che la nostra dimostrazione si discosta un po' da quella di Serrin, in quanto facciamo uso del Lemma 2.1.

Teorema 2.3. *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega \in C^2$*
Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di

$$-\Delta u = f(u) \quad in\ \Omega \tag{2.18}$$

$$u = 0 \qquad su\ \partial\Omega \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c \qquad su\ \partial\Omega \tag{2.20}$$

$$u > 0 \qquad in\ \Omega \tag{2.21}$$

dove $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana
allora
Ω è una palla (e quindi u è a simmetria radiale con $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$)

Dimostrazione. Fissiamo una direzione dell'asse x_1. Grazie all'ipotesi di regolarità sul $\partial\Omega$ possiamo applicare la procedura del moving planes rispetto a tale direzione fissata ed ottenere il corrispondente λ_1 in cui avvengono le situazioni (i) o (ii) dell'Osservazione 2.1.Fissiamo l'origine dell'asse x_1 al valore λ_1 (quindi $\lambda_1 = 0$).
Definiamo

$$v_0(x) \doteq u(P_0 x) \qquad , x \in P_0\Sigma(0)$$

essa verifica:

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = f(v_0) & , \text{ in } P_0\Sigma(0) \\ \\ v_0 = \begin{cases} 0 & , \text{ su } \partial P_0\Sigma(0) \setminus T(0) \\ u & , \text{ su } \Omega \cap T(0) \end{cases} \\ \\ \frac{\partial v_0}{\partial n} = c & , \text{ su } \partial P_0\Sigma(0) \setminus T(0) \end{cases}$$

Essendo per costruzione $P_0\Sigma(0) \subseteq \Omega$, allora possiamo considerare la funzione

$$w_0(x) \doteq u(x) - v_0(x) = u(x) - u(P_0 x) \qquad , x \in P_0\Sigma(0)$$

Dalla (ii) del Lemma 2.1 (applicato prendendo $\lambda^* = 0$) segue che

$$w_0 \geq 0 \text{ su } P_0\Sigma(0)$$

Inoltre essa verifica :

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = f(u) - f(v_0) = c(x) w_0 & , \text{ in } P_0\Sigma(0) \\ \\ w_0 = \begin{cases} u \geq 0 & , \text{ su } \partial P_0\Sigma(0) \setminus T(0) \\ 0 & , \text{ su } \Omega \cap T(0) \end{cases} \end{cases}$$

dove

$$c(x) \doteq \begin{cases} \frac{f(u)-f(v_0)}{u-v_0} & \text{, se } u \neq v_0 \\ 0 & \text{, se } u = v_0 \end{cases}$$

e $c \in L^\infty(P_0\Sigma(0))$ grazie all'ipotesi di locale lipschitzianità di f.

Pertanto per il Principio di Massimo Forte si ha che $w_0 \equiv 0$ almeno in una componente connessa di $P_0\Sigma(0)$ a meno che non sia $w_0 > 0$ in $P_0\Sigma(0)$. Mostriamo che la seconda delle due alternative non può avvenire analizzando separatamente i due casi (i) e (ii) dell'Osservazione 2.1:

(i) (Usiamo l'ipotesi di sovradeterminatezza (2.20) ed il Lemma di Hopf)

Se per assurdo fosse $w_0 > 0$ in $P_0\Sigma(0)$ allora, poichè $w_0(P) = u(P) - v_0(P) = 0$, dal Lemma di Hopf segue che $\frac{\partial w_0}{\partial n}(P) < 0$, ma $\frac{\partial w_0}{\partial n}(P) = \frac{\partial u}{\partial n}(P) - \frac{\partial v_0}{\partial n}(P) = \frac{\partial u}{\partial n}(P) - \frac{\partial u}{\partial n}(P_0P) = c - c = 0$ e siamo quindi giunti ad una contraddizione.

(ii) (Usiamo ancora l'ipotesi di sovradeterminatezza (2.20) ma questa volta Q è un punto d'angolo per il dominio $P_0\Sigma(0)$ e quindi utilizziamo la variante del Lemma di Hopf per punti d'angolo)

Innanzitutto, sfruttando in particolare l'ipotesi (2.20), è facile verificare (si veda [S]) che u e v_0 hanno le stesse derivate prime e seconde nel punto Q e quindi

$$\frac{\partial w_0}{\partial s}(Q) = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}(Q) = 0$$

Supponiamo per assurdo che $w_0 > 0$ in $P_0\Sigma(0)$ allora, poichè $w_0(Q) = u(Q) - v_0(Q) = 0$, dal Lemma di Hopf per Punti d'Angolo seguirebbe l'assurdo:

$$\frac{\partial w_0}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}(Q) > 0$$

Abbiamio quindi dimostrato che $w_0 \equiv 0$ almeno in una componente connessa di $P_0\Sigma(0)$ o equivalentemente, dette rispettivamente $P_0S(0)$ ed $S(0)$ tale componente e la sua riflessa, che u è simmetrico in $P_0S(0) \cup S(0) \cup (T(0) \cap \partial S(0))$.

Mostriamo come questo implichi che Ω è connesso e simmetrico rispetto ad x_1:

dalla simmetria di u appena dimostrata segue infatti che $u = 0$ su $\partial P_0S(0) \setminus T(0) \subset \overline{\Omega}$, e poichè per ipotesi $u > 0$ su Ω, allora necessariamente $\partial P_0S(0) \setminus T(0) \subset \partial\Omega$

e precisamente Ω deve coincidere proprio con l'insieme su cui u è simmetrico:

$$\Omega = P_0S(0) \cup S(0) \cup (T(0) \cap \partial S(0))$$

Per concludere la dimostrazione basta ripetere il procedimento in ogni direzione, otterremo così che per ogni direzione dell'asse x_1 fissata, esiste un piano T_{λ_1} (normale alla direzione) rispetto al quale l'insieme Ω è simmetrico.
Inoltre Ω è semplicemente connesso (abbiamo visto già che è connesso, ed inoltre non può avere "buchi" per costruzione in quanto deve contenere $P_\lambda\Sigma(\lambda), \forall\lambda \geq \lambda_1$).
Pertanto Ω è una palla.

$\square$