Capitolo 1

RISULTATI PRELIMINARI

1.1 Principi di massimo

E' noto che nello studio delle equazioni ellittiche del secondo ordine i principi di massimo hanno un ruolo fondamentale.
Nei capitoli che seguiranno tali principi saranno uno strumento essenziale per ottenere informazioni sul comportamento delle soluzioni di equazioni ellittiche semilineari del tipo

$$-\Delta u = f(x, u)$$

Come vedremo, grazie ad ipotesi opportune sulla funzione f, ci ricondurremo sempre ad utilizzare principi di massimo per operatori ellittici del secondo ordine della forma:

$$Lu = \Delta u + c(x)u, \text{ con } c \in L^{\infty}(\Omega), u \in H^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ aperto} \tag{1.1}$$

In questo paragrafo ci occupiamo quindi dei principi di massimo limitandoci ad operatori di questo tipo (pur essendo noti risultati per operatori più generali).
Osserviamo infine che trattandosi di operatori lineari, i principi di massimo sono equivalenti ai principi di confronto.

1.1.1 Principio di massimo forte

Sia L un operatore verificante (1.1).
La dimostrazione del prossimo teorema si basa sulla Disuguaglianza di Harnach Debole (si veda [GT, pag. 184] per il caso più generale):

Lemma 1.1 (Disuguaglianza di Harnach Debole). *Se $Lu \leq 0$ in Ω e $u \geq$*

$0 \quad in\ B_{4R}(y) \subset \Omega,\ 1 \leq p < \frac{N}{N-2}$ *allora*

$$\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq R^{\frac{N}{p}} K \inf_{B_R(y)} u$$

dove $K = K\,(N, \|c\|_\infty, p) > 0$

Teorema 1.1 (Principio di Massimo Forte). *Se inoltre* Ω *è connesso, ed* $u \in C(\Omega)$ *si ha che*
se $Lu \leq 0$ *in* Ω *e* $u \geq 0$ *in* Ω *allora*
$u \equiv 0$ *in* Ω *oppure* $u > 0$ *in* Ω

Dimostrazione. Supponiamo che esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = 0$ allora l'insieme $O \doteq \{x \in \Omega | u(x) = 0\}$ è non vuoto; esso è inoltre chiuso relativamente ad Ω (essendo $u \in C(\Omega)$), mostriamo che è anche aperto relativamente ad Ω: sia $x \in O$ e sia $R > 0$ t.c. $B_{4R}(x) \subset \Omega$, allora, essendo u continua, $u(x) = 0 = inf\{u(y) | y \in B_R(x)\}$, ma allora, dalla Disuguaglianza di Harnach Debole segue che $\|u\|_{L^p(B_{2R}(x))} \leq 0$ e quindi, ~~essendo u continua e non negativa~~, segue che $u = 0$ in $B_{2R}(x)$ ossia che $B_{2R}(x) \subseteq O$. Pertanto dall'ipotesi di connessione di Ω segue che $O \equiv \Omega$ ossia che $u \equiv 0$ in Ω.

□

1.1.2 Principio di massimo debole

In questa sezione consideriamo sempre operatori L del tipo (1.1) ma supponiamo inoltre che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sia un aperto limitato.

Definizione 1.1. *Scriviamo* $Lu \leq 0$ *in* Ω *se* u *è soprasoluzione (debole) di* $-\Delta u - c(x)u = 0$ *in* Ω *ossia se* $\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega c(x) u \varphi \geq 0 \quad , \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$

Definizione 1.2. *Scriviamo* $u \geq 0$ *su* $\partial\Omega$ *se* $u^- \in H_0^1(\Omega)$

Definizione 1.3. *Diciamo che vale il principio del massimo debole per* L *in* Ω *se* $Lu \leq 0$ *in* Ω *e* $u \geq 0$ *su* $\partial\Omega$ *implicano* $u \geq 0$ *in* Ω.

Vediamo delle **condizioni sufficienti** affinchè valga il principio di massimo debole. La prima di esse è ben nota per operatori più generali (si veda ad esempio [GT, cap. 9]). Ne riportiamo la dimostrazione nel nostro caso particolare poichè la otteniamo molto semplicemente facendo uso della disuguaglianza di Poincarè.

Teorema 1.2. *Se* $c(x) \leq 0$ *q.o. allora vale il principio di massimo debole per* L *in* Ω

Dimostrazione. Per densità, dalla disuguaglianza $Lu \leq 0$ in Ω si ottiene

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega c(x) u \varphi \geq 0 \qquad , \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0$$

Prendendo $\varphi = u^-$ si ha (poichè $u = u^+ - u^-$ e $\nabla u^+ = \nabla u$ (dove $u>0$), $\nabla u^- = -\nabla u$ (dove $u<0$))

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 \leq \int_\Omega c(x) |u^-|^2 \leq 0$$

quindi (grazie alla disuguaglianza di Poincarè) (! $\left(\int_\Omega |\nabla u^-|^2\right)^{1/2}$ è una norma equivalente

$$\| u^- \|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla u^-|^2 = 0$$

da cui $u^- = 0$ q.o. in Ω
ossia $u \geq 0$ q.o. in Ω □

La seguente condizione è stata introdotta dapprima da Berestycki, Niremberg e Varadhan (si veda ad esempio [BN1]) ma qui la dimostriamo in modo simile a quello introdotto da Dancer in [D] ovvero facendo uso della disuguaglianza di Poincarè.

Teorema 1.3 (Principio di massimo debole in domini piccoli). *Esiste $\delta > 0$ dipendente solo da $N, \| c \|_{L^\infty(\Omega)}$ tale che il principio di massimo debole vale per L in D, $\forall D \subseteq \Omega$ aperto limitato tale che $| D | < \delta$.*

Dimostrazione. Se $c(x) \leq 0$ allora si rientra nel caso del Teorema 1.2 e la tesi vale $\forall D \subseteq \Omega$ aperto limitato senza dover fare restrizioni sulla sua misura.
Nel caso $c(x) > 0$ in parte del dominio invece, questo teorema è una effettiva generalizzazione di quello precedente, e va quindi dimostrato.

Sia $u \in H^1(D)$, $u \geq 0$ su ∂D, tale che $Lu \leq 0$ in D, quindi tale che

$$\int_D \nabla u \nabla \varphi - \int_D c(x) u \varphi \geq 0 \quad , \forall \varphi \in H_0^1(D), \varphi \geq 0$$

Prendendo $\varphi = u^-$, allora, dalla disuguaglianza di Poincarè si ottiene [1]

$$\int_D | \nabla u^- |^2 \leq \int_D c(x) |u^-|^2 \leq \| c \|_{L^\infty(\Omega)} \| u^- \|_{L^2(D)}^2 \leq \| c \|_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{| D |}{\omega_N} \right)^{\frac{2}{N}} \| \nabla u^- \|_{L^2(D)}^2$$

[1] Disuguaglianza di Poincarè (si veda [GT, pag. 157])
Sia D un aperto limitato, $v \in W_0^{1,p}(D)$, $1 \leq p < \infty$, allora

$$\| v \|_{L^p(D)} \leq \left(\frac{| D |}{\omega_N} \right)^{\frac{1}{N}} \| \nabla v \|_{L^p(D)}$$

quindi

$$\left[1 - \| c \|_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{|D|}{\omega_N}\right)^{\frac{2}{N}}\right] \int_D |\nabla u^-|^2 \leq 0$$

Fissato $\delta \doteq \frac{\omega_N}{\|c\|^{\frac{N}{2}}_{L^\infty(\Omega)}}$ allora, se $|D| < \delta$ si ha $\left[1 - \| c \|_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{|D|}{\omega_N}\right)^{\frac{2}{N}}\right] > 0$ e quindi necessariamente

$$\int_D |\nabla u^-|^2 = 0$$

pertanto

$$u^- \equiv 0 \quad su\ D$$

ossia

$$u \geq 0 \quad su\ D$$

□

Teorema 1.4. *Se esiste $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,N}(\Omega)$, $g > 0$ in $\overline{\Omega}$, $Lg \leq 0$ in Ω allora vale il principio di massimo debole per L in Ω* (*)

Dimostrazione. Sia $u \in H^1(\Omega)$ t.c. $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, $Lu \leq 0$ su Ω e sia $z \doteq \frac{u}{g}$ allora

$$Lu = L(gz) = \triangle z g + 2 g_{x_i} z_{x_i} g + \triangle g z + c(x) g z \leq 0 \qquad , in\ \Omega$$

quindi

$$\triangle z + 2 g_{x_i} z_{x_i} + \left(\frac{Lg}{g}\right)(x) z \leq 0 \qquad , in\ \Omega$$

dove $\left(\frac{Lg}{g}\right)(x) \leq 0$ per le ipotesi fatte

$$z \geq 0 \quad , su\ \partial\Omega$$

quindi per il Teorema 1.2 (valido come già osservato anche nel caso di operatori ellittici di forma più generale) segue che

$$z \geq 0 \quad su\ \Omega$$

e quindi che

$$u \geq 0 \quad su\ \Omega$$

□

Per la dimostrazione del teorema precedente si veda ad esempio [PW2] o [BNV].

Il prossimo teorema è una condizione sufficiente per un po' meno del principio di massimo debole nella forma da noi enunciata:

(*) si può estendere al caso in cui $g \geq 0$ in Ω e $g > 0$ su $S \subset \partial\Omega$ con $|S| > 0$.

Teorema 1.5. *Se esiste $g \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $g > 0$ in Ω, $g = 0$ su $\partial\Omega$, $Lg \leq\not\equiv 0$ in Ω allora vale il principio di massimo debole per L in Ω sulle funzioni $C(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che non valga il principio di max debole per L in Ω sulle funzioni continue.
Allora esiste $\nu \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ tale che $L\nu \leq 0$ su Ω, $\nu \geq 0$ su $\partial\Omega$ e $\nu < 0$ in qualche "punto" di Ω (~~ν è def q.o. quindi vogliamo intendere~~ "in un sottoinsieme di Ω di misura non nulla").
Sia $K \subset \Omega$ chiuso (quindi compatto, essendo Ω limitato) tale che $\Omega \backslash K$ abbia misura sufficientementa piccola in modo che valga il Teorema 1.3.
Consideriamo $z \doteq \nu + tg$, $t > 0$, allora, per t sufficientemente grande $z > 0$ su K vogliamo far vedere che $z \geq 0$ su tutto Ω.
Grazie alle ipotesi fatte,

$$Lz = L\nu + tLg \leq 0 \qquad in\, \Omega \setminus K$$

e

$$z = \begin{cases} \nu \geq 0 & su\ \partial\Omega \\ \nu + tg > 0 & su\ \partial K (\subset K) \end{cases}$$

quindi per il Teorema 1.3 $z \geq 0$ in $\Omega \setminus K$.
Sia ora $\tau \doteq \inf\{\ t \mid \nu + tg \geq 0\ su\, \Omega\}$.
Ovviamente $\nu + \tau g \geq 0$ su Ω e, poichè $\nu < 0$ in qualche parte di Ω, allora $\tau > 0$.
A questo punto se $\nu + \tau g = 0$ su Ω, allora $-\nu = \tau g$ e quindi $0 \leq -L\nu = \tau Lg \leq 0$ e pertanto arriviamo all'assurdo $Lg \equiv 0$.

Se invece $\nu + \tau g \geq\not\equiv 0$ in Ω, allora per il Principio di Massimo Forte $\nu + \tau g > 0$ in Ω (il Principio di Massimo Forte è applicabile in quanto abbiamo preso $\nu \in C(\Omega)$ e quindi $\nu + \tau g \in C(\Omega)$), ma allora per un certo s tale che $0 < s < \tau$, $\xi \doteq \nu + (\tau - s)g > 0$ su K, e poichè $L\xi \leq 0$, allora come prima troviamo che $\xi \geq 0$ in $\Omega \setminus K$ e quindi in tutto Ω e ciò contraddice la definizione di τ. □

1.1.3 Lemma di Hopf

Il prossimo teorema dà un risultato in un certo senso equivalente al principio di massimo forte.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto
e $Lu = \Delta u + c(x)u$, $c \in L^\infty(\Omega)$

Definizione 1.4. *Diciamo che un punto $x_0 \in \partial\Omega$* ***verifica la condizione di sfera interna*** *se esiste una palla aperta $B = B_R(x_1) \subset \Omega$ tale che $\overline{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$.*

In tal caso possiamo scegliere il versore normale a $\partial\Omega$ in x_0 diretto verso l'esterno

O.K. se $\partial\Omega$ è regolare

$$n = \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|}$$

e definire un versore ν esterno a $\partial\Omega$ in x_0 se $\nu \cdot n > 0$.

Teorema 1.6 (Lemma di Hopf). *Sia Ω un aperto connesso, $x_0 \in \partial\Omega$ verificante la condizione di sfera interna, ν un versore esterno a $\partial\Omega$ in x_0 $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ tale che $Lu \leq 0$ in Ω (debolmente), $u \geq 0$ in Ω, $u(x_0) = 0$, allora*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0 \qquad \textit{oppure} \qquad u \equiv 0 \;\; in\, \Omega$$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso $c(x) \leq 0$.

La dimostrazione che segue è adattata da quella per sottosoluzioni classiche di $Lu = 0$ in Ω fornita in [PW2]. Nel nostro caso si richiede minore regolarità della funzione u e quindi facciamo uso anche del Principio di Massimo Debole per sottosoluzioni deboli di $Lu = 0$ *in* Ω (Teorema 1.2).

Supponiamo che $u \not\equiv 0$.
Siano $K_1 = B_{r_1}(x_1)$ la palla della condizione di sfera interna, $K_2 = B_{\frac{r_1}{2}}(x_0)$ e $K' = K_1 \cap K_2$.
Definiamo la funzione ausiliaria

$$z(x) = e^{-\alpha|x-x_1|^2} - e^{-\alpha r_1^2} \qquad , x \in \Omega$$

dove α è una costante positiva da determinare.
Osserviamo che:

1. $u > 0 \quad su\, \overline{K}_1 \setminus \{x_0\}$ *(per il Principio di Massimo Forte)*
   $u = 0 \quad su\, x_0$.
2. $\exists \delta > 0$ *t.c* $u \geq \delta > 0$ $su\, \partial K_2 \cap \partial K'$ (poichè u è positiva e continua sul compatto $\partial K_2 \cap \partial K'$ e quindi assume il suo inf)
3. $z > 0$ $su\, K_1$
   $z = 0$ $su\, \partial K_1$
   $z < 0$ $su\, \Omega \setminus \overline{K}_1$.

Svolgendo i calcoli necessari otteniamo:

$$\begin{aligned} Lz &= \triangle z + c(x)z = e^{-\alpha|x-x_1|^2}\left[c(x) + 4\alpha^2|x-x_1|^2 - 2N\alpha\right] - c(x)e^{-\alpha r_1^2} \geq \\ &\geq e^{-\alpha|x-x_1|^2}\left[-\|c\|_\infty + \alpha^2 r_1^2 - 2N\alpha\right] - \|c\|_\infty e^{-\alpha r_1^2} \qquad , \; in\; K_2 \cap \Omega. \end{aligned}$$

basta quindi scegliere α sufficientementemente grande per avere

$$Lz > 0 \qquad in\ K_2 \cap \Omega.$$

Consideriamo quindi la funzione

$$w(x) = u(x) - \varepsilon z(x) \qquad , x \in \Omega$$

dove ε è una costante positiva da determinare, allora:

- $Lw < 0$ su K'
- $w \geq 0$ su $\partial K'$

  infatti grazie alle 3. e 1. $w(x) = u(x) \geq 0$ su $\partial K_1 \cap \overline{K}_2$
  e grazie alla 2. segue che $w = u - \varepsilon z \geq \delta - \varepsilon z > \delta - \varepsilon \left(1 - e^{-\alpha r_1^2}\right)$, pertanto a patto di scegliere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $\left(\varepsilon < \frac{\delta}{1-e^{-\alpha r_1^2}}\right)$, segue che $w(x) > 0$ su $\partial K_2 \cap K_1$

pertanto per il Principio di Massimo Debole (Teorema 1.2, applicabile in quanto stiamo trattando il caso $c(x) \leq 0$) risulta $w \geq 0$ su K' e per il Principio di Massimo Forte $w > 0$ su K' (escludiamo il caso $w \equiv 0$ su K' in quanto ciò implicherebbe $Lw \equiv 0$, mentre abbiamo dimostrato la disuguaglianza stretta).
Pertanto x_0 è un punto di minimo di bordo per w (proprio come lo era per u), di conseguenza: $0 \geq \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) - \varepsilon \frac{\partial z}{\partial \nu}(x_0)$.
Mostriamo ora che $\frac{\partial z}{\partial \nu}(x_0) < 0$, così seguirà che $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ ossia la tesi:

supponiamo che x_1 coincida con l'origine del sistema di riferimento e poniamo $r = |x - x_1| = |x|$, quindi abbiamo

$$z(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_1^2} = z(r)$$

Per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \nu}(x_0) &= \nabla z \cdot \nu = -2\alpha e^{-\alpha r^2} x_0 \cdot \nu = \\ &= -2\alpha e^{-\alpha r^2} \underset{r_1}{r} n \cdot \nu < 0. \end{aligned}$$

se $\underline{n \cdot \nu > 0}$

Il risultato nel caso generale $c(x)$ di segno qualunque segue da una osservazione presente in [GNN] basata su un'idea di Serrin.

Definiamo $v \doteq e^{-\alpha x_1}u$, $\alpha > 0$ $\quad X = (X_1, \dots X_n)$

$0 \geq Lu = L(e^{\alpha x_1}v) = \Delta(e^{\alpha x_1}v) + c(x)(e^{\alpha x_1}v) = v\,(\alpha^2 + c(x))\,e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_1}\Delta v$ $+ 2\alpha e^{\alpha x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}$

dividendo per $e^{\alpha x_1}$ otteniamo

$$\mathcal{L}v \leq 0 \qquad in\,\Omega$$

dove $\mathcal{L} = \Delta + (\alpha^2 + c(x))$ $+ 2\alpha e^{\alpha x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}$

Per α sufficientemente grande $(\alpha^2 + c(x)) \geq 0$ e inoltre per definizione $v \geq 0 \quad in\,\Omega$, quindi segue che

$$\Delta v \leq \mathcal{L}v \leq 0 \qquad in\,\Omega$$

inoltre

$$v \geq 0 \quad in\,\Omega$$

$$v(x_0) = 0$$

quindi per quanto dimostrato nel caso precedente (in particolare con $c(x) = 0$):

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0$$

per cui

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = e^{\alpha x_1}\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0$$ (Se $e_1 \cdot \nu = 0$)

□

Nel prossimo capitolo faremo uso anche di una estensione del lemma di Hopf per punti d'angolo dovuta a Serrin (si veda [S, Lemma 1]), poichè si tratta di un risultato di interesse più ampio, ne enunciamo qui una versione leggermente più generale di quella che ci servirebbe e che mette bene in evidenza il legame con la geometria del dominio (per la dimostrazione, che fa uso degli stessi strumenti di quella appena vista, definendo numerose ed opportune funzioni ausiliarie, rimandiamo al [GNN, Lemma S]).

Teorema 1.7 (Lemma di Hopf per punti d'angolo). *Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^N$ con origine O sul suo bordo. Assumiamo che vicino a O il bordo consista di due ipersuperfici di classe C^2 $\varrho = 0$ e $\sigma = 0$ che si intersecano trasversalmente. Supponiamo $\varrho, \sigma < 0$ in Ω.*
Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che $Lu \geq 0$ in Ω, $u < 0$ in Ω, $u(O) = 0$.
Assumiamo che

$$\nabla\varrho\nabla\sigma \geq 0 \qquad in\ O \tag{1.2}$$

Se è proprio 0 assumiamo inoltre che

$$D(\nabla\varrho\nabla\sigma) = 0 \qquad in\ O$$

per ogni derivata D del primo ordine in O tangente alla sottovarietà $\{\varrho = 0\} \cap \{\sigma = 0\}$.
Allora, per ogni direzione s in O che entra in Ω trasversalmente a ciascuna superficie

$$\frac{\partial u}{\partial s} < 0 \qquad \text{in } O \text{ in caso di disuguaglianza stretta in (1.2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} < 0 \quad o \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} < 0 \qquad \text{in } O \text{ in caso di uguaglianza in (1.2)}$$

1.2 Proprietà spettrali per operatori uniformemente ellittici autoaggiunti del II ordine

1.2.1 Autovalori ed autofunzioni

Vogliamo risolvere il problema agli autovalori con condizione di Dirichlet omogenea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato

$$\begin{cases} -Lu = \lambda u & , \text{ in } \Omega \\ u = 0 & , \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $L = \triangle u + c(x)$, $c \in L^\infty(\Omega)$

Teorema 1.8 (di esistenza di autofunzioni, autovalori). *Per un certo $k > 0$ esiste una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ $\{\psi_n\}_n$ ed una successione di numeri reali $\{\lambda_n\}_n$ con*

$$\lambda_n \to +\infty$$

$$-k < \lambda_1 \le \lambda_2 \le .... \le \lambda_n \le ....$$

tali che

$$\begin{cases} -\triangle \psi_n - c(x)\psi_n = \lambda_n \psi_n & , \text{ in } \Omega \\ \psi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Definizione 1.5. *Chiamiamo $\{\psi_n\}_n, \{\lambda_n\}_n$ rispettivamente autofunzioni ed autovalori di L in Ω*
Ed in particolare λ_1 autovalore principale.

Dimostrazione. Sia $k \ge \|c\|_\infty$, allora, per questa scelta di k, la forma bilineare e continua su $H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = q(u, v) + k \int_\Omega uv$$