Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ANALISI NUMERICA 2013/2014
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 7: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

A. Scrivere i codici **eulero**, **heun**, **eulmod**, **eulimp** e **trapezi** che implementano le formule di Eulero, di Heun, di Eulero modificato, di Eulero implicito e di Crank Nicolson. N.B. Ogni codice implementa *un passo* del relativo metodo - esplicito o implicito - per la soluzione numerica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,(y(t)) \quad t \in I \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

B. Studiare la sintassi delle seguenti funzioni intrinseche del MATLAB

```
input
switch
case
otherwise
```

C. Laboratorio.

1. Scrivere uno script che, supposti assegnati (come *function* o *inline function*)
   - la funzione f - di variabili t e y,
   - la funzione $\partial f/\partial y$ - di variabili t e y,
   - la funzione (soluzione esatta) y - di variabile t,

   - richieda l'inserimento (mediante la function *input*) di t_0, y_0, t_0+T,
   - richieda (mediante le function *switch*, *case* e *otherwise*) di scegliere tra uno dei metodi di soluzione numerica implementati,
   - fissi per i metodi impliciti la tolleranza a $1.e-10$ e il numero massimo di iterate a 20,
   - parta dal passo di integrazione $h = 1$ e lo dimezzi fino ad avere $h = 2^{-8}$, effettuando ogni volta N_h passi del metodo prescelto, con N_h parte intera di T/h,
   - approssimi per ogni h la soluzione del problema differenziale al tempo $t_{N_h} = t_0 + hN_h$ e ne calcoli l'errore rispetto a $y(t_0+T)$.

2. Applicare lo script al punto 1. ai seguenti problemi di Cauchy, dei quali è riportata la soluzione esatta:

$$\begin{cases} y'(t) &= -y(t)\log_e(y(t)), \\ y(0) &= 0.5, \end{cases} \qquad y(t) = e^{-e^{(\log_e(\log_e(2))-t)}}$$

$$\begin{cases} y'(t) &= -e^{-(t+y(t))}, \\ y(0) &= 1, \end{cases} \qquad y(t) = \log_e(e + e^{-t} - 1)$$

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)(1-y(t)), \\ y(0) &= 0.5, \end{cases} \qquad y(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$

Scegliere $T = 10$. Per ogni problema e per ogni metodo visualizzare il vettore (di nove componenti) degli errori in $t_{N_h} \equiv t_0 + T$ in scala semilogaritmica. Analizzare i risultati ottenuti e la velocità di convergenza dei metodi utilizzati.

3. Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \lambda\, y(t) \\ y(0) &= 1, \end{cases} \tag{1}$$

scegliere $\lambda = -5$, $h = 0.41$ ed effettuare 100 passi dei metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito e Crank Nicolson. Visualizzare le traiettorie approssimate nel piano (t, y) in un unico grafico. Fare lo stesso con $h = 0.2$ effettuando il numero di passi necessario per approssimare la soluzione nello stesso intervallo temporale. Stabilire quale tolleranza e quale numero massimo di iterate sarà opportuno assegnare per l'utilizzo degli schemi impliciti.

4. Assegnato il seguente problema di Cauchy che descrive l'evoluzione di due popolazioni predatore-preda in competizione fra di loro (modello di Lotka Volterra):

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t)(1-y_2(t)), \\ y_2'(t) &= -y_2(t)(1-y_1(t)), \\ y_1(0) &= 2, \\ y_2(0) &= 2, \end{cases}$$

effettuare 2000 iterazioni con passo $5.e-3$ dei metodo di Eulero implicito e di Crank Nicolson (con tolleranza $1.e-10$ e numero massimo di iterate 20). Per ogni metodo, visualizzare in un primo grafico le soluzioni approssimate in funzione del tempo (traiettorie y_1 e y_2 su t), e in un secondo grafico le traiettorie nel piano delle fasi (traiettoria y_2 su traiettoria y_1).