Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ANALISI NUMERICA 2013/2014
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 6: Integrazione numerica

A. Scrivere i codici **midpntc**, **trapezc** e **simpsonc** per le formule di quadratura del punto medio composita (ovvero dei rettangoli), del trapezio composita (ovvero dei trapezi), di Cavalieri-Simpson composita (ovvero delle parabole).
I codici possono essere trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri, dopo aver apportato le modifiche discusse in classe riguardanti l'uso della function *feval* al posto di *eval*.

B. Studiare la sintassi delle seguenti funzioni intrinseche del MATLAB

```
vectorize
trapz
```

C. Laboratorio.

1. È assegnata la funzione $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)$. Per approssimare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

applicare i metodi dei rettangoli, dei trapezi e delle parabole su una griglia uniforme di m intervalli, con $m = 2^t$, t=0:8.

Ricordando che si ha

$$\int_0^{2\pi} x\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) = \frac{3-10\pi}{25\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{3}{25},$$

per ognuno dei tre metodi costruire il vettore (di otto componenti) $|E_{n,m}(f)|/|E_{n,2m}(f)|$ - dove con n si intende 0, 1 o 2, a seconda del metodo considerato.

Visualizzare i tre vettori (con gli indici in ascissa e le componenti in ordinata) e commentare i risultati ottenuti.

2. È assegnata la funzione $f(x) = |x^2 - \frac{1}{2}|$. Per approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx, \tag{1}$$

applicare i metodi dei rettangoli, dei trapezi e delle parabole su una griglia uniforme di m intervalli, con $m = 2^t$, t=0:8.

Ricordando che l'integrale in (1) è uguale a $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$, per ognuno dei tre metodi costruire il vettore (di nove componenti) $|E_{n,m}(f)|$.

Visualizzare i tre vettori (con gli indici in ascissa e le componenti in ordinata) in un unico grafico in scala semilogaritmica e commentare i risultati ottenuti.

3. È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Per approssimare l'integrale

$$\int_{-5}^{5} f(x)dx, \tag{2}$$

applicare i metodi dei rettangoli, dei trapezi e delle parabole su una griglia uniforme di m intervalli, con $m = 2^t$, t=0:8.

Ricordando che l'integrale in (2) è uguale a $2\arctan(5)$, per ognuno dei tre metodi costruire il vettore $|E_{n,m}(f)|$.

Visualizzare i tre vettori (con gli indici in ascissa e le componenti in ordinata) in un unico grafico in scala semilogaritmica e commentare i risultati ottenuti.

4. Scrivere una function che riceve in input a, b, e f e restituisce in output l'approssimazione dell'integrale della funzione f in $[a, b]$ con la formula chiusa di Newton Cotes a quattro nodi ($n = 3$), ricordando che si ha $\alpha_0 = \alpha_3 = 3h/8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 9h/8$.

5. Assegnato l'integrale

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)dx, \tag{3}$$

scrivere una maggiorazione dell'errore $E_3(f)$ che si commette se si approssima l'integrale con la formula chiusa di Newton Cotes a quattro nodi, ricordando che si ha $|\mathcal{K}_3| = \dfrac{3}{80}$. Applicare la function al punto 4. per approssimare l'integrale in (3) e verificare l'affidabilità della stima.

Stabilire in quanti intervalli si dovrebbe suddividere $[0, \pi]$ per avere garanzia di una approssimazione con cinque cifre significative esatte.