Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ANALISI NUMERICA 2013/2014
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 5: METODI PER L'APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE DI FUNZIONI E DATI

A. Scrivere i codici **interpol**, **dividif**, **hermpol** e **spline2** per calcolare il polinomio interpolatore con la formula di Newton alle differenze divise, il polinomio osculatore di Hermite, e la spline cubica interpolatoria naturale - relativa a nodi equispaziati - e le sue derivate prima e seconda.
Parte dei codici possono essere trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri.

B. Studiare la sintassi delle seguenti funzioni intrinseche del MATLAB

```
linspace
subplot
interp1
spline
polyval
polyfit
```

C. Laboratorio.

1. Scrivere uno script che, se una funzione f reale a variabile reale ed un intervallo $[a, b]$ sono assegnati,
   - valuti in 100 punti equispaziati in $[a, b]$ i polinomi interpolatori di grado 2 e di grado 10 di f in $[a, b]$, facendo uso di nodi equispaziati in $[a, b]$;
   - visualizzi Π_2, E_2, Π_{10}, E_{10} in quattro *subplot*.

2. Applicare lo script al punto 1. alle seguenti funzioni e ai relativi intervalli

$$f(x) = \log_{\mathrm{e}}(x), \quad [1, 2];$$

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad [0, 1];$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad [-5, 5].$$

   Commentare i risultati ottenuti.

3. Scrivere una function che riceve in input a, b e n e restituisce in output gli $n + 1$ nodi di Chebyshev in $[a, b]$.

4. Modificare lo script al punto 1. in modo che, se una funzione f reale a variabile reale ed un intervallo $[a, b]$ sono assegnati,
   - valuti in 100 punti equispaziati in $[a, b]$ i polinomi interpolatori di grado 2 e di grado 10 di f in $[a, b]$, facendo uso dei nodi di Chebyshev;
   - visualizzi Π_2, E_2, Π_{10}, E_{10} in quattro *subplot*.
5. Applicare lo script al punto 4. alle funzioni e ai relativi intervalli al punto 2. Commentare i risultati ottenuti.
6. Valutare in 100 punti equispaziati in $[0, 1]$ il polinomio interpolatore di Lagrange e il polinomio osculatore di Hermite di $f(x) = \sin(4\pi x)$ in $[0, 1]$ facendo uso di quattro nodi equispaziati in $[0, 1]$. Visualizzare in un unico grafico f, Π_3 e H_7.
7. Costruire la tabella delle differenze divise per $x = 0 : 0.4 : 2$ e $f(x) = 1 + \sin(3x)$. Stimare l'errore $E_4(0.2)$ relativo al polinomio interpolatore $\Pi_4(x)$ con nodi $0 : 0.4 : 1.6$.
8. Dati i nodi nodi equispaziati $x_0 = -5, \ldots, x_{100} = 5$, valutare la spline cubica naturale s_3 di $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, relativa a tali nodi, nei punti medi di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1 : 100$. Calcolare la norma infinito del vettore degli errori. Visualizzare il grafico della spline s_3.
9. Valutare s_3' - derivata prima di s_3 - nei punti medi di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1 : 100$. Calcolare la norma infinito del vettore degli errori, ricordando che $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Commentare il risultato ottenuto. Visualizzare il grafico della spline s_3'.
10. Valutare s_3'' - derivata seconda di s_3 - nei punti medi di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1 : 100$. Calcolare la norma infinito del vettore degli errori, ricordando che $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Commentare il risultato ottenuto. Visualizzare il grafico della spline s_3''.
11. Considerare le funzioni f - con i relativi intervalli $[a, b]$ - definite al punto 2. Dati i nodi equispaziati $x_0 = a, \ldots, x_{10} = b$, calcolare le ordinate $f(x_i)$, con $i = 0 : 10$ e valutare il polinomio ai minimi quadrati di grado 3 nei punti medi di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1 : 10$. Calcolare la norma infinito del vettore degli errori. Commentare il risultato ottenuto.