

Corso di ANALISI NUMERICA 2013/2014
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 2: METODI ITERATIVI PER I SISTEMI LINEARI

A. Scrivere i codici **jacobi** e **SOR** che implementano i seguenti metodi:

1. Metodo di Jacobi
2. Metodo di Gauss Seidel
3. Metodo del rilassamento

per la soluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$.

I codici possono essere trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri, dopo aver apportato le modifiche discusse in classe - per esempio, nel codice che implementa il metodo del rilassamento il criterio d'arresto deve essere dato dal controllo dell'incremento nell'approssimazione della soluzione.

B. Laboratorio.

1. Controllare l'andamento dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicato a cinque matrici test A_h con fattore di predominanza diagonale $h = 2 : 2 : 10$ (ovvero tali che ogni elemento diagonale sia h volte la somma dei moduli degli altri elementi della stessa riga). Per la costruzione di A_h si può ad esempio procedere come segue.

```
A=rand(10);  
A=A-diag(diag(A));  
s=sum(abs(A),2);  
A=A+h*diag(s);
```

2. Considerare i quattro sistemi lineari $A_i x = b_i$ con b_i calcolato in modo che la soluzione del sistema sia sempre il vettore unitario e con le matrici A_i date da

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss Seidel e calcolare il raggio spettrale delle relative matrici di iterazione per ciascun sistema lineare.

3. Costruire la matrice simmetrica definita positiva $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ tale che:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4 & i = j \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire se metodi di Jacobi, di Gauss Seidel, e del rilassamento con $\omega \in (0, 2)$ sono convergenti.

Calcolare il parametro ottimale ω_{opt} per il metodo del rilassamento. Verificare sperimentalmente applicando il metodo con $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$ e calcolando il valore ω^* che dà luogo al numero minimo di iterazioni per convergere.

Verificare che il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss Seidel è il quadrato del raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi. (Quale è in tal caso la relazione tra le velocità asintotiche dei metodi?) Costruire il termine noto b in modo tale che la soluzione esatta sia il vettore unitario. Fissare la tolleranza a 10^{-12} e confrontare sperimentalmente le prestazioni dei metodi di Jacobi, di Gauss Seidel, e SOR con parametro ω_{opt} .

Visualizzare l'andamento della norma dell'energia $\|\cdot\|_A$ dell'errore nei tre metodi in un unico grafico in scala semilogaritmica (con il numero k di iterazioni in ascisse). Fare analogamente con la norma euclidea $\|\cdot\|_2$.