Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ANALISI NUMERICA 2013/2014
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 1: Metodi diretti per i sistemi lineari

A. Scrivere i codici **forwardrow**, **backwardrow**, **lukij**, **chol2** e **modthomas** che implementano i seguenti metodi:

1. Metodo delle sostituzioni in avanti
2. Metodo delle sostituzioni all'indietro
3. Fattorizzazione LU (senza pivotazione)
4. Metodo di Cholesky (in $\mathbb{C}$)
5. Metodo di Thomas modificato

per la soluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$.
I codici possono essere parzialmente trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri, dopo aver apportato le modifiche discusse in classe - per esempio, nel codice che implementa il metodo di Cholesky la matrice in input deve poter avere elementi complessi.

B. Studiare la sintassi delle seguenti funzioni intrinseche del MATLAB

```
eps
rand
size
diag
tril
triu
sum
prod
det
hilb
eig
norm
cond
mldivide (\)
lu
chol
plot
semilogy
```

C. Generare matrici con proprietà particolari - simmetriche, tridiagonali, dominanti diagonali, hermitiane definite positive,... (Per esempio, per generare A simmetrica semidefinita positiva, si può costruire una matrice random B reale e poi ottenere A come $A = B^T B$). Testare i codici (la scelta del termine noto b è libera) dopo aver controllato che le proprietà delle matrici necessarie al buon funzionamento dei metodi siano verificate.

D. Laboratorio MATLAB.

1. Scrivere un codice che costruisca la matrice di Hilbert, ovvero la matrice $A_n = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che
$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$
Confrontare con la matrice fornita dalla funzione **hilb** del MATLAB. Calcolare il numero di condizionamento in norma spettrale $\kappa_2(A_n)$, per $n = 1 : 10$ - facendo uso della funzione **cond** del MATLAB - e salvare i risultati in un vettore di 10 componenti. Visualizzare in un grafico in scala semilogaritmica (lineare nelle ascisse e logaritmica nelle ordinate) l'andamento di tale vettore, utilizzando l'opportuna funzione di visualizzazione del MATLAB. (Cosa se ne deduce?)

2. Utilizzare il comando

```
[L,U,P]=lu(A);
```

per verificare che la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ ammette un'unica fattorizzazione LU senza ricorrere alla pivotazione. Confrontare con il risultato fornito dal codice **lukij**.

3. Costruire la matrice simmetrica definita positiva $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ tale che:
$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Calcolare la fattorizzazione di Cholesky e la fattorizzazione LU di A. Confrontare i risultati con quelli forniti dalle relative funzioni intrinseche del MATLAB. Trovare la soluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove
$$b_i = \begin{cases} 0 & i = 2 : 9 \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
facendo uso dei metodi delle sostituzioni in avanti e all'indietro. Confrontare con la soluzione ottenuta utilizzando la funzione intrinseca del MATLAB che implementa il metodo di Gauss. Trovare la soluzione del suddetto sistema lineare facendo uso del metodo di Thomas modificato. Calcolare il raggio spettrale di A e verificare che coincide con la norma spettrale di A. (Perché?)