CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA A.A. 2013/2014
"Calcolo 1"–canale 2 (I–Z)

DOCENTE F. Leoni

Diario delle lezioni

1 Ottobre Definizione assiomatica di sistema di numeri reali: struttura algebrica e proprietà di continuità (assioma di Dedekind). Richiami su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

3 Ottobre Assiomi di Peano per i numeri naturali; individuazione di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ come sottoinsiemi di un sistema di numeri reali. Unicità del sistema di numeri reali (enunciato). Cenni su alcuni modelli di numeri reali: l'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$, rappresentazione decimale, rappresentazione geometrica con assioma di Cantor.

4 Ottobre Struttura metrica in $\mathbb{R}$: definizione di modulo o valore assoluto, distanza euclidea. Definizione di intervallo limitato e non, insieme limitato e non, maggiorante, minorante, estremo superiore ed estremo inferiore.

8 Ottobre Equivalenza fra l'assioma di Dedekind e l'esistenza dell'estremo superiore. Caratterizzazione di sup e inf; esempi.

10 Ottobre Teorema di esistenza della radice n-esima. Definizione di successione reale, successione convergente, successione divergente, successione limitata; esempi. Limitatezza delle successioni convergenti e unicità del limite.

11 Ottobre Primi limiti notevoli: successione geometrica, $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{n}$. Teorema dei due carabinieri e della permanenza del segno.

15 Ottobre Operazioni con i limiti e forme indeterminate. Criterio del rapporto per successioni, rapporto e radice n-esima. Confronto fra potenze ed esponenziali di n.

17 Ottobre Confronti fra infiniti. Teorema di regolarità delle successioni monotone. La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Esercizi.

18 Ottobre Potenze con esponente reale: funzioni potenza ed esponenziale. Definizione, proprietà e grafici. Funzioni logaritmo. Definizione di sottosuccessione e proprietà . Applicazioni.

22 Ottobre Confronto fra infiniti: logaritmi e potenze. Serie numeriche: definizioni ed esempi. Condizione necessaria di convergenza. Serie geometrica. Serie armonica.

24 Ottobre Serie a temini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico. Esempi. Serie esponenziale e successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Irrazionalità di e.

25 Ottobre	Formula del binomio di Newton. Serie a termini positivi: criterio della radice e del rapporto. Esempi, controesempi e applicazioni.
29 Ottobre	Criterio di condensazione di Cauchy per serie a termini positivi e decrescenti; serie armonica generalizzata e serie a termini logaritmici. Limiti notevoli con funzioni trigonometriche.
31 Ottobre	Serie a termini di segno variabile: criterio di convergenza assoluta. Esempi. Serie a termini di segno alterno: criterio di convergenza di Leibniz e stima dell'errore. Esempi e controesempi.
5 Novembre	Conseguenze del criterio di Leibniz: costante di Eulero–Mascheroni e somma della serie armonica a segni alterni. Proprietà commutativa per le serie: definizione di riordinamento, riordinamenti di serie assolutamente convergenti, riordinamenti di serie semplicemente convergenti ma assolutamente divergenti.
7 Novembre	Definizione di limite di funzioni; esempi. Limite destro, limite sinistro, limite della funzione composta. Enunciato del teorema ponte.
8 Novembre	Limiti notevoli di funzioni. Esercizi di preparazione alla prova in itinere.
19 Novembre	Dimostrazione del teorema ponte. Conseguenze: operazioni con i limiti di funzioni e teorema di confronto. Permanenza del segno per limiti di funzioni. Definizione di funzione continua; esempi. Teorema della permanenza del segno. Correzione del compito di esonero.
21 Novembre	Definizioni equivalenti di continuità , somma, prodotto e quoziente di funzioni continue; esempi. Classificazione delle discontinuità ; esempi. Discontinuità delle funzioni monotone.
22 Novembre	Altre proprietà fondamentali delle funzioni continue: teorema di esistenza degli zeri, teorema dei valori intermedi e teorema di Weierstrass.
26 Novembre	Commenti al teorema di Weierstrass, enunciato del teorema di Bolzano–Weierstrass. Funzioni continue invertibili: caso di funzioni definite su intervalli (invertibilià e monotonia, continuità e proprietà dell'immagine).
28 Novembre	Gli o–piccoli o simboli di Landau: definizione e proprietà . Riscrittura del limiti notevoli già noti con gli o–piccoli, esempi. Definizione di derivata; interpretazione fisica e geometrica. Derivate delle funzioni elementari (potenze intere, $\sin x$, $\cos x$, funzione esponenziale e logaritmica).
29 Novembre	Proprietà algebriche della derivata: derivata della somma, del prodotto, del quoziente, della composizione di funzioni e dell'inversa. Esempi ed esercizi.
3 Dicembre	Applicazioni della teoria delle derivate: teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange e Cauchy. Esempi. Conseguenze del teorema del valor medio: caratterizzazione delle funzioni costanti, monotonia e segno della derivata prima, continuità della derivata prima.

5 Dicembre	Funzioni convesse: definizione, interpretazione geometrica, definizione equivalente ed esempi. Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili, caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili due volte. Discussione risultati prova in itinere.
6 Dicembre	Studio di funzione attraverso un esempio: dominio, simmetrie eventuali, continuità, comportamento agli "estremi" del dominio, eventuali asintoti, derivabilità, ricerca di estremi locali e assoluti, monotonia e convessità. Funzioni convesse e asintoti all'infinito. Derivate delle funzioni trigonometriche inverse.
10 Dicembre	Teorema di de l'Hopital; esempi. Teorema di Taylor; sviluppi della funzione esponenziale e del logaritmo.
12 Dicembre	Calcolo del polinomio di Taylor per $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$. Uso del teorema di Taylor nel calcolo dei limiti: esempi. Resto in forma di Lagrange. Serie di Taylor per e^x, $\sin x$, $\cos x$.
13 Dicembre	Sviluppo di Taylor di $\arctan x$. Uso delle derivate successive per la caratterizzazione dei punti di estremo locale. Uso del polinomio di Taylor per il calcolo approssimato. Calcolo dell'area del rettangoloide esponenziale.
17 Dicembre	Partizioni di un intervallo. Somme integrali superiori e inferiori e loro monotonia rispetto alla partizione. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e criterio di integrabilità . Un esempio di funzione non integrabile. Integrabilità delle funzioni monotone.
19 Dicembre	Funzioni lipschitziane e loro integrabilià . Proprietà dell'integrale: additività rispetto al dominio, linearità rispetto alla somma, monotonia, integrabilità del modulo di una funzione integrabile.
20 Dicembre	Integrabilità delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità . Teorema della media integrale. Lipschitzianità della funzione integrale e sua derivabilità . Teorema fondamentale del calcolo integrale. Definizione di primitiva e di integrale indefinito. Alcuni integrali indefiniti immediati.
7 Gennaio	Metodo di integrazione per parti e per sostituzione. Esempi.
9 Gennaio	Integrazione delle funzioni razionali; esempi. Integrazione di alcune funzioni irrazionali e di funzioni razionali in $\sin x$ e $\cos x$; esempi.
10 Gennaio	Integrazione di altre funzioni irrazionali. Integrali in senso improprio: definizione ed esempi. Criterio del confronto per gli integrali impropri.
14 Gennaio	Criterio di convergenza assoluta per gli integrali impropri; esempi. Integrali impropri su intervalli illimitati superiormente e serie: analogie e differenze. Esercizi.