Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 10

1) Calcolare il polinomio di Taylor del terzo ordine per $f(x) = \sin(e^x - 1)$ in $x = 0$, per $g(x) = \log x$ in $x = 2$, per $h(x) = \sin x$ e $k(x) = \cos x$ in $x = \frac{\pi}{2}$. Si puó calcolare il polinomio di Taylor del terzo ordine in 0 per la funzione

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per} x \neq 0, \\ 1 & \text{per} x = 0? \end{cases}$$

2) Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange,
(i) calcolare le prime 7 cifre decimali di $\log(1,01)$;
(ii) dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

3) Sia data la successione r_n definita da

$$r_n = e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \cdots - \frac{1}{n!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Dimostrare che, per ogni $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$0 < r_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{x^2} - \sin x}{x \sin^2 x}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x) - x\cos\sqrt{x}}{x^3}.$$

5) Determinare A e B in modo tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{A(e^x - 1) + B\log(1+x) - (x^3 + 5x^2 - x)}{x^3} = L,$$

con L numero reale.

6) (a) Ricordando che $f(x)$ é un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$, per $x \to 0$, se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \quad \text{finito e non nullo,}$$

determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, delle funzioni:

$$(i)\ \cos^2 x - 1x^2; \quad (ii)\, x^2 + x\log|x| + x; \quad (iii)\, \frac{x\sqrt{x} + x^5 - 3x}{x + 4\sqrt{x}}.$$

(b) Ricordando che $f(x)$ é un infinito di ordine $\alpha > 0$, per $x \to +\infty$, se

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \quad \text{finito e non nullo,}$$

determinare, se esiste, l'ordine di infinito, per $x \to +\infty$, delle funzioni:

$$(i)\, x\log x; \quad (ii)\, \frac{x^2 + x\log x}{\sqrt{x}+1}; \quad (iii)\, \frac{x\sqrt{x} + x^5 - 3x}{x + 4\sqrt{x}}.$$

7) (a) Si studino le seguenti funzioni

$$f(x) = \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad g(x) = \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

determinando insiemi di definizione, continuitá e derivabilitá, limiti ed asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi assoluti e relativi, intervalli di concavitá e convessitá. Tali funzioni sono chiamate, rispettivamente, seno iperbolico e coseno iperbolico.

Dimostrare che risulta

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

(b) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = e^x(\cosh x - \sinh x).$$

Spiegare il motivo del risultato ottenuto.

8) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione é convessa su tutto $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ \alpha x, & x < 0, \end{cases}$$