Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 9

1) Sia f: $(a, b) \to \mathbb{R}$ continua, e sia $c \in (a, b)$. Supponiamo di sapere che f é derivabile in tutti i punti $x \neq c$, e che esiste finito il limite $\lim_{x\to c} f'(x) = L$. Dimostrare che f é derivabile anche in c e che si ha $f'(c) = L$.

2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si dimostri che:
(i) f è derivabile in $x = 0$, con $f'(0) = 0$;
(iii) il limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.

3) Date le funzioni:

$$a) \quad f(x) = x^2 + 2\cos x, \qquad b) \quad g(x) = 6e^x - x^3$$

$$c) \quad h(x) = \begin{cases} x^3, & \text{per} \quad x \geq 0, \\ x^2, & \text{per} \quad x \leq 0, \end{cases} \qquad d) \quad p(x) = \begin{cases} e^x, & \text{per} \quad x \geq 0, \\ 1 + x + ax^2, & \text{per} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

dimostrare che f, g h sono convesse su tutto $\mathbb{R}$, e determinare per quali valori del parametro a la funzione $p(x)$ é convessa su $\mathbb{R}$. Infine dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^{11} + x^6$$

non é convessa su $\mathbb{R}$.

4) Si studi la funzione

$$f(x) = x^2 - \sin^2(x),$$

determinando insiemi di definizione, continuitá e derivabilitá, limiti ed asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi assoluti e relativi, intervalli di concavitá e convessitá.

5) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{1-2\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{[\frac{\pi}{2}-\arctan x]^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,[x-\log(1+x)]}{[e^{x^2}-1]\log(1+x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{e^x-1-\sin x}.$$

6) Calcolare il dominio e le derivate delle seguenti funzioni

$$\frac{x^2-2}{x(x+1)}, \quad \sqrt{x}e^{1-x^2}, \quad \cos\sqrt{1+x^2}, \quad (x^{\frac{3}{2}}+1)^{\sin x}, \quad \log|\log\cos x|.$$

7) Trovare, se esistono, il massimo M e il minimo m delle seguenti funzioni negli intervalli indicati a fianco di ognuna di esse:

$$6a)\ (x^2-3)e^{2-x}, \qquad [1,+\infty),$$

$$6b)\ \sin x+|\cos x|, \qquad [0,\pi],$$

$$6c)\ x^p+x^{-q},\ (p,q>0) \qquad (0,+\infty).$$

8) Dimostrare che se f é convessa in $\mathbb{R}$ e $f'(x_0)=0$ allora x_0 é un punto di minimo globale per f in $\mathbb{R}$.

9) Dimostrare che se f é strettamente convessa in $\mathbb{R}$, allora f ha al piú un punto di minimo.

10) Date le funzioni

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}, \qquad g(x)=xe^{\left|\frac{x^2-1}{x}\right|},$$

determinare l'insieme di definizione, l'insieme di continuità, l'insieme di derivabilità, eventuali asintoti, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali massimi e minimi relativi. Determinarne inoltre l'immagine, l'estremo superiore

e l'estremo inferiore, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo assoluti.

11). Date le funzioni

$$f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,, \qquad g(x) = x^{1+\log(x)}\,,$$

determinare l'insieme di definizione, l'insieme di continuità, l'insieme di derivabilità, eventuali asintoti, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali massimi e minimi relativi, gli intervalli di convessità e concavità. Determinarne inoltre l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo assoluti.

12) Dimostrare che la funzione $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 1 + 2x + x\log(1+x^2)$$

è invertibile e, detta $g(y)$ la sua inversa, calcolare $g'(1)$.

13) Dimostrare che comunque si scelgano a, $b \in [0,2]$ risulta

$$\left|\log\left(\frac{b^3+1}{a^3+1}\right)\right| \leq \sqrt[3]{4}\,|b-a|\,.$$

14) Determinare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il numero delle radici reali dell'equazione

$$x^2 + x + 1 - ae^x = 0\,.$$