Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 8

Esercizio 1. Dimostrare che

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \forall \ x \in [-1, 1]\,;$$
$$\arccos x = \arctan \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \quad \forall \ x \in (0, 1]\,.$$

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}\,; \quad g(x) = e^{\sin x} - \sin x\,.$$

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme di continuità, l'insieme di derivabilità, calcolare la derivata, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza, trovare massimi e minimi relativi ed assoluti:

$$\frac{2}{2+x}\,; \quad \frac{x(x+1)}{2x-3}\,; \quad \arctan(1 - x^2)\,; \quad |2 - 3x|\,;$$
$$|x - 1| + |3 - 4x|\,; \quad xe^{|x-1|}\,; \quad 2x - \log(2x^2 - 1)\,.$$

Esercizio 4. Determinare per quali valori dei parametri α e β le seguenti funzioni sono continue e per quali valori sono derivabili

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1 & \text{per } \ x > 0\,, \\ \alpha + \beta x & \text{per } \ x \le 0\,; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta x^2 & \text{per } \ x > 0\,, \\ \alpha & \text{per } \ x = 0\,, \\ 1 - \cos x & \text{per } \ x < 0\,; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \beta x & \text{per } x > 0\,, \\ \alpha & \text{per } x = 0\,, \\ x e^{\frac{1}{x}} & \text{per } x < 0\,; \end{cases}$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $x \geq 0$ si ha

$$e^x \geq 1 + x\,; \quad \log(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}\,; \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

Cosa potete dire della prima disuguaglianza se $x < 0$? Siete in grado di dimostrare che la terza non è vera per ogni $x < 0$ senza calcolare nessuna derivata?

Esercizio 6. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } 0 \leq x \leq 1\,, \\ x^2 + ax - a & \text{per } 1 < x \leq 2\,. \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che sia applicabile il teorema del valor medio in $[0, 2]$ e calcolare i punti ξ soddisfacenti la tesi del teorema.

Esercizio 7. Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,.$$

Determinare per quale valore di a è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}, a\right]$ e trovare il punto ξ che verifica la tesi del teorema.

Esercizio 8. Sia

$$f(x) = \frac{(x^2+1)\log x}{x}\,.$$

Dimostrare che f è invertibile in $(0, +\infty)$ e determinare il dominio di f^{-1}.

Esercizio 9. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $(0, +\infty)$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Dimostrare che esiste $x_0 \in (0, +\infty)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Esercizio 10. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni

$$\frac{x^2-2}{x(x+1)}\,; \quad \sqrt{x}e^{1-x^2}\,; \quad \cos\sqrt{1+x^2}\,; \quad (x^{3/2}+1)^{\sin x}\,; \quad \log|\log(\cos x)|\,.$$