Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 7

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}\,; \qquad \lim_{x\to 1^{\pm}} (x^2-1)e^{\frac{1}{x-1}}\,.$$

Esercizio 2. Stabilire per quali valori di α e β sono continue le seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1-2x)}{1-e^{-3x}} & \text{per } x<0\,, \\ \alpha & \text{per } x=0\,, \\ \beta(1+x) & \text{per } x>0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + \frac{\log(1+\alpha^2 x)}{x} & \text{per } x>0\,, \\ \alpha+\beta x^2 & \text{per } x\le 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+2}{x^2}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{1-\cos(x)}\,;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}\,; \quad \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,;$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}\,; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}\,;$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sin\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)e^x\,; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2}{\log\left(1+(\sin(x))^4\right)}\,.$$

Esercizio 4. Stabilire per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ le seguenti funzioni hanno limite in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x+a & x<0\,, \\ e^x & x\ge 0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & x\le 0\,, \\ 3e^{2x} & x>0\,, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \cos(4x) & x<0\,, \\ \pi x^2+a & x>0\,. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $f(x) = \log(1 + x^2) + x$. Dimostrare che esiste almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = -1$. Determinare un intervallo limitato in cui si trova una soluzione della precedente equazione.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^x - \log(1 + x^2) - \sin(x)\,.$$

Dimostrare che f è suriettiva.

Esercizio 7. Per ogni $a > 0$, siano f_a e g_a le funzioni definite da

$$f_a(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x \leq 0\,, \\ x^2 & \text{per } x > a\,, \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} 4\arctan(2x^2) & \text{per } x > 0\,, \\ x + a & \text{per } x \leq -1\,. \end{cases}$$

Studiare continuità, iniettività e continuità di f_a^{-1} e g_a^{-1} al variare di $a > 0$.

Esercizio 8. Determinare esplicitamente oppure dimostrare che non esiste una funzione f tale che:

- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva;
- $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva;
- $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, suriettiva e monotona;
- $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, suriettiva e invertibile.