Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 6

Esercizio 1. Trovare il dominio delle seguenti funzioni

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}\,; \qquad \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}\,; \qquad \sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}\,; \qquad \frac{1+\tan(x)}{1+\tan(2x)} \quad (-\pi \le x \le \pi)\,.$$

Successivamente, calcolarne i limiti nei punti di frontiera dei rispettivi domini.

Esercizio 2. Trovare il dominio della seguente funzione

$$\frac{x^{\sin(x)}+1}{e^{\sin(x)}-1}\,.$$

Esercizio 3. Trovare il dominio e l'espressione della funzione composta $f(g(x))$ quando f e g sono le funzioni seguenti

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad f(x) = x^2 + x\,, \quad g(x) = \frac{x-1}{2x+5}\,;\\
&(2) \qquad f(x) = \sqrt{1-x^3}\,, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{x-3}\,;\\
&(3) \qquad f(x) = \sqrt{\log(x)}\,, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x}\,;\\
&(4) \qquad f(x) = \sqrt{e^x-1}\,, \quad g(x) = \sin(x)\,;\\
&(5) \qquad f(x) = \sqrt{\log(x)}\,, \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1}\,;\\
&(6) \qquad f(x) = e^{2x}\,, \quad g(x) = x^2+1\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 2^x}{(1+\sqrt{x})(3^x-x)}\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5-7x}{2x^2-6x^5}\,; \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{2-x}\,;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x+1}\,.$$

Esercizio 5. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

dove, nel secondo caso, compaiono n radici quadrate (con $n \geq 2$ fissato).

Esercizio 6. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos(2x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{1-\cos(\sqrt{x})}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sin(\sqrt{x+1})-\sin(\sqrt{x})\right).$$

Esercizio 7. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione periodica non costante. Dimostrare allora che non esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$

Esercizio 8. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2+x)}{x^2}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{10x^2-7x^3}\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\,; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)-\sin(2x)}{x}\,.$$