1. Serie numeriche

Esercizio 1. Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{3^n n^n}\,.$$

Soluzione. (1). Serie a termini positivi; confrontiamola con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n2^n}{3^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n^3}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie è convergente.

(2). Serie a termini positivi. Usiamo il Criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to 0\,, \end{aligned}$$

da cui segue il carattere convergente della serie.

(3). Serie a termini positivi. Usiamo il Criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{((n)!(n+1))^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \to 0\,, \end{aligned}$$

da cui il carattere convergente della serie.

(4). Serie a termini positivi; confrontiamola con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente:

$$\frac{\frac{2^n n!}{3^n n^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2^n n! n^2}{3^n n^n} = \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \cdot \frac{n!}{n^n}\,.$$

Dal momento che $\frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to 0$ e $\frac{n!}{n^n} \to 0$, per il Criterio del confronto asintotico la serie è convergente.

Esercizio 2. Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n\sqrt{n+1}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{3^n+\log(n)}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\sin(n)}{3^n+n^2}\,.$$

Soluzione. (1). Serie a termini positivi. Usiamo il Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n}{4^n\sqrt{n+1}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/2}}}\,,$$

dove $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ (si ricordi che $\sqrt[n]{n^b} \to 1$ per ogni $b \in \mathbb{R}$) e $\sqrt[n]{(n+1)^{1/2}} \to 1$. Relativamente a quest'ultimo limite, basta osservare che

$$1 \le \sqrt{n+1} \le \sqrt{2n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}\,,$$

da cui segue

$$1 \leq \sqrt[n]{(n+1)^{1/2}} \leq \sqrt[n]{2^{1/2}} \cdot \sqrt[n]{n^{1/2}}\,.$$

Di conseguenza, poichè $\sqrt[n]{n^{1/2}} \to 1$ e $\sqrt[n]{2^{1/2}} \to 1$, per il Teorema dei carabinieri si ha anche $\sqrt[n]{(n+1)^{1/2}} \to 1$. Mettendo insieme queste informazioni si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4}\,,$$

da cui il carattere convergente della serie.

(2). Dal momento che $\frac{n^3}{4^n} \to 0$ e $\frac{\log(n)}{3^n} \to 0$ per risultati generali sul confronto tra infiniti, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n + n^3}{3^n + \log(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1 + \frac{n^3}{4^n}}{1 + \frac{\log(n)}{3^n}} = +\infty\,.$$

Pertanto, *poichè la serie è a termini positivi* – quindi o converge o diverge – e non è verificata la condizione necessaria per la convergenza – infatti la successione a_n non è infinitesima – la serie diverge.

(3). Serie a termini positivi. Osservando che

$$a_n = \frac{2^n + \sin(n)}{3^n + n^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1 + \frac{\sin(n)}{2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}}\,,$$

confrontiamo la serie con la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ che è convergente. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n)}{2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}} = 1\,,$$

pertanto la serie converge per il Criterio del confronto asintotico.

Esercizio 3. Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - 1\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n+1}{2^n n}\right)\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 1})\,.$$

Soluzione. (1). Serie a termini positivi. Dal momento che

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\,, \end{aligned}$$

e per risultati generali sui limiti notevoli si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1\,,$$

conviene confrontare la serie con la serie armonica (generalizzata) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che è convergente. In particolare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \cdot n^{3/2} = 1\,,$$

pertanto la serie è convergente per il Criterio del confronto asintotico.

(2). Serie a termini positivi. Usando il Criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e} > 1\,,$$

da cui la serie diverge.

(3). Serie a termini positivi (perchè?). Dal momento che $\frac{n+1}{2^n n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} \to 0$, e ricordando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan x_n}{x_n}$$

per ogni successione $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, conviene un confronto con la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ che è convergente. In particolare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{n+1}{2^n n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{n+1}{2^n n}\right)}{\frac{n+1}{2^n n}} \cdot \frac{\frac{n+1}{2^n n}}{\frac{1}{2^n}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{n+1}{2^n n}\right)}{\frac{n+1}{2^n n}} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

e la serie converge per il Criterio del confronto asintotico.

(4). Serie a termini positivi. Usando il Criterio della Radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{4} < 1\,,$$

quindi la serie converge.

(5). Serie a termini positivi. Razionalizzando si ha

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \sqrt{n^2+1} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\,,$$

perciò, intuitivamente, conviene un confronto con la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge. In particolare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}\,,$$

pertanto la serie diverge per il Criterio del confronto asintotico.

(6) Serie a termini positivi (perchè?). Usando l'identità

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-\sqrt[3]{n^3-1}}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}\cdot\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}\right)= \\ &= \frac{1}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt[3]{n^3-1}}{n}+\frac{\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}{n^2}}\,, \end{aligned}$$

ed osservando che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3-1}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}=1\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^2}=1\,,$$

conviene il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (che converge). Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\sqrt[3]{n^3-1}}{n}+\frac{\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}{n^2}}=\frac{1}{3}\,,$$

da cui il carattere convergente della serie.

Esercizio 4. Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2+\log(n+1)+1}\,;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n}}\,.$$

Soluzione. Entrambe le serie non sono a termini positivi; proviamo a studiarne la convergenza assoluta (che a sua volta implica la convergenza semplice).

(1). Ricordando che $|\cos(n)|\le 1$, otteniamo

$$|a_n|\le\frac{1}{n^2+\log(n+1)+1}\le\frac{1}{n^2}\,,$$

pertanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge per confronto diretto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$.

(2). Osservando che

$$|a_n|=\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

dove

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1\,,$$

conviene il confronto tra la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, che è convergente. Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1\,.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ converge assolutamente.

Esercizio 5. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^x \; ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{2^n + 1}\right) .$$

(1). La serie è termini positivi, quindi o converge o diverge. Per $x < 0$ si ha $\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^x \to +\infty$, pertanto non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza: essendo a termini positivi, ne deduciamo che la serie diverge. Si vede facilmente che la serie diverge anche per $x = 0$.

Consideriamo quindi il caso $x > 0$. Ricordando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} , \tag{1.1}$$

ricorriamo al confronto con la serie armonica (generalizzata)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}} \begin{cases} \text{convergente se } \; x > \frac{1}{2} , \\ \text{divergente se } \; x \le \frac{1}{2} . \end{cases} \tag{1.2}$$

Infatti, poichè da (1.1) risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2x} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^x = \lim_{n\to+\infty} \left(n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x ,$$

le due serie hanno lo stesso carattere.

In conclusione la serie converge per $x > \frac{1}{2}$ e diverge altrimenti.

(2). Osservando che $\frac{x^{2n}}{2^n+1} \ge 0$, la serie è a termini positivi. Inoltre,

$$\frac{x^{2n}}{2^n + 1} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}} , \tag{1.3}$$

da cui si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{2^n + 1}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{x^2}{2} > 1 , \\ \log(2) & \text{se } \frac{x^2}{2} = 1 , \\ 0 & \text{se } \frac{x^2}{2} < 1 . \end{cases}$$

Ricordando la condizione necessaria per la convergenza e ricordando che una serie a termini positivi o converge o diverge, abbiamo che la serie sicuramente diverge per $x \ge \sqrt{2}$ oppure per $x \le -\sqrt{2}$. Quando $\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, basta osservare che da (1.3) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x^{2n}}{2^n+1}\right)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x^{2n}}{2^n+1}\right)}{\frac{x^{2n}}{2^n+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}} = 1 ,$$

pertanto la serie ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ di ragione $\frac{x^2}{2} < 1$ (quindi convergente).

In conclusione la serie converge per $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e diverge altrimenti.

Esercizio 6. Studiare al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(3n)^n}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Soluzione. (1). La serie converge chiaramente per $x = 0$. Se $x \neq 0$, osservando che

$$a_n = \frac{n! x^n}{(3n)^n} = \frac{n!}{n^n}\left(\frac{x}{3}\right)^n\,,$$

si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,. \tag{1.4}$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \frac{1}{e}\,. \tag{1.5}$$

Pertanto, applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti, si conclude che la serie converge assolutamente per $|x| < 3e$. Quando invece $|x| > 3e$, da (1.5) si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \frac{1}{e} > 1\,. \tag{1.6}$$

Ne segue che $|a_n| \to +\infty$ e quindi non è verificata la condizione necessaria per la convergenza: in conclusione per $|x| > 3e$ la serie non converge, neanche semplicemente. Infine, se $|x| = 3e$, da (1.4) abbiamo

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1\,, \tag{1.7}$$

ricordando che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione $|a_n|$ risulta quindi crescente e di conseguenza non può essere infinitesima. Se ne deduce che anche in questo caso la serie non converge. Riassumendo la serie converge (assolutamente) per $x \in (-3e, 3e)$ e non converge altrove.

(2). Consideriamo la successione dei valori assoluti

$$|a_n| = \frac{(2^x)^n}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Chiaramente per $x > 0$ abbiamo $|a_n| \to +\infty$; in questo caso, non essendo verificata la condizione necessaria, la serie non converge.

Per $x < 0$, confrontando la serie dei valori assoluti $\sum |a_n|$ con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n$ otteniamo

$$|a_n| = \frac{(2^x)^n}{\sqrt{n^2+1}} \leq (2^x)^n\,.$$

Quindi la serie risulta essere assolutamente convergente per $x < 0$.

Infine, per $x = 0$, ci si riduce a studiare la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\,. \tag{1.8}$$

Dal momento che la successione

$$\alpha_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

è positiva, infinitesima e decrescente (infatti $n \le n+1 \Rightarrow n^2 \le (n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{(n+1)^2+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), dal Criterio di Leibniz discende la convergenza semplice di (1.8). Si noti che la convergenza non è assoluta, dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

e la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Esercizio 7. Dimostrare che per ogni $p > 1$ vale la seguente implicazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\,.$$

Soluzione. Ricordando la condizione necessaria per la convergenza di una serie – ovvero $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ – esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < 1$ per ogni $n \ge \nu$. Ne segue che per tali n si ha anche $|a_n|^p < |a_n|$ per ogni $p > 1$. Pertanto la conclusione segue dal Teorema del Confronto.

Esercizio 8. Siano a_n e b_n tali che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty$. Si dimostri che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$$

sono convergenti.

Soluzione. Ricordando che $0 < (|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n| \cdot |b_n|$, si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)\,. \tag{1.9}$$

Pochè per ipotesi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty$ – da cui anche $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < +\infty$ – da (1.9) e dal Criterio del Confronto segue la convergenza assoluta (di conseguenza anche semplice) della prima serie. Questo in particolare implica che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2 + 2|a_n b_n|) < +\infty\,. \tag{1.10}$$

Relativamente alla seconda, osserviamo che

$$0 \le (a_n+b_n)^2 \le a_n^2 + b_n^2 + 2|a_n b_n|\,;$$

pertanto la conclusione segue dal confronto diretto con la serie in (1.10), che è convergente.