1. Limiti di Successioni – Infiniti ed Infinitesimi

Esercizio 1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-3}\,;$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\log n+\sqrt{n}}{2^n+5^n}\,;$$

$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!+2}{n!}\right)^{n^n}.$$

Soluzione. (1). Riscrivendo oppportunamente la successione, si ha

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-3} = \frac{\sqrt{n^2(1+1/n^2)}}{2n-3} = \frac{n}{2n-3}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1\,,$$

il limite richiesto esiste e vale 1/2.

(2). Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine superiore, otteniamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2-\log n+\sqrt{n}}{2^n+5^n} = \\ &= \frac{n^2}{5^n}\cdot\frac{1-\frac{\log(n)}{n^2}+\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}\,. \end{aligned}$$

Dal momento che, ricordando la *gerarchia degli infiniti*, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{5^n} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{\log(n)}{n^2}+\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1\,,$$

il limite richiesto esiste e vale zero.

(3). Riscriviamo la successione come segue

$$a_n = \left(\frac{n!+2}{n!}\right)^{n^n} = \left(1+\frac{1}{n!/2}\right)^{\frac{n!}{2}\cdot\frac{2n^n}{n!}} = \alpha_n^{\beta_n}\,,$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(1+\frac{1}{n!/2}\right)^{\frac{n!}{2}}\,, \\ \beta_n &= \frac{2n^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \quad \text{per ogni successione } x_n \to +\infty\,,$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!/2}\right)^{\frac{n!}{2}} = e\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^n}{n!} = +\infty\,.$$

Dal primo limite, essendo $e > 2$, si ricava facilmente che fissato arbitrariamente $\epsilon > 0$ tale che $e - \epsilon > 2$ si ha $\alpha_n > e - \epsilon > 2$, da cui

$$\alpha_n^{\beta_n} \geq 2^{\beta_n}\,,$$

definitivamente in n. Ricordando che $\beta_n \to +\infty$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{\beta_n} = +\infty\,.$$

Pertanto per il Teorema del Confronto deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!+2}{n!}\right)^{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{\beta_n} = +\infty\,.$$

Esercizio 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+4}}\,;$$
$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n+7^n}\,;$$
$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n^2+3}\right)^n\,;$$
$$(4) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^2}}\,,$$
$$(5) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{n^2+1}}\,.$$

Soluzione. (1). Riscrivendo oppportunamente la successione, si ha

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+4}} = \frac{\sqrt{n^2(1+1/n^2)}}{\sqrt[3]{n^3(1+4/n^3)}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}}\,,$$

dove l'ultimo termine tende a 1 nel limite per $n \to +\infty$. Di conseguenza il limite richiesto esiste e vale 1.

(2). Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{4^n+7^n} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{7^n\left(1+\left(\frac{4}{7}\right)^n\right)} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} 7\sqrt[n]{1+\left(\frac{4}{7}\right)^n} = 7\,,\end{aligned}$$

dal momento che $1+(4/7)^n \to 1$ per $n\to+\infty$, e quindi anche $\sqrt[n]{1+\left(\frac{4}{7}\right)^n}\to 1$ (si ricordi che se $a_n>0$, $a_n\to a>0$ e $b_n\to b\in\mathbb{R}$, allora $a_n^{b_n}\to a^b$).
(3). Osservando che

$$2+\frac{1}{n^2+3}\geq 2 \implies \left(2+\frac{1}{n^2+3}\right)^n \geq 2^n$$

e $2^n\to+\infty$, per il Teorema del Confronto il limite richiesto esiste e vale $+\infty$.
(4). Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{3}{n^2}} = 1$$

dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n^2} = 1\,.$$

(5). Ricordando che per ogni $b\in\mathbb{R}$ si ha $\sqrt[n]{n^b}\to 1$, abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{n+1}} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2\cdot\frac{n}{n+1}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = 1\,,\end{aligned}$$

perchè

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = 1\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = 1\,.$$

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}&(1)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n^3)}{\log(n^3+3n^2)}\,;\\ &(2)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n n^3}{3^n-n^2}\,;\\ &(3)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n(n^2-5n+\log n)}{n!(2n^2+1)}\,;\\ &(4)\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3}\,.\end{aligned}$$

Soluzione. (1). Osservando che

$$\log(n^3+3n^2) = \log\left(n^3\left(1+\frac{3}{n}\right)\right) = \log(n^3)+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\log(n^3)}{\log(n^3+3n^2)} = \frac{\log(n^3)}{\log(n^3)+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \\ &= \frac{1}{1+\frac{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log(n^3)}}\,. \end{aligned}$$

Dal momento che $\log\left(1+\frac{3}{n}\right) \to \log(1) = 0$ e $\log(n^3) \to +\infty$, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log(n^3)} = 0\,.$$

Pertanto $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$.

(2). Riscrivendo opportunamente la successione, abbiamo

$$a_n = \frac{2^n n^3}{3^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{n^2}{3^n}} = \frac{n^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{n^2}{3^n}}\,.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0\,, \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0\,, \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{n^2}{3^n}} = 1\,, \end{aligned}$$

da cui segue che il limite richiesto esiste e vale zero.

(3). Riscrivendo opportunamente la successione e mettendo in evidenza gli infiniti di ordine superiore nei termini tra parentesi, abbiamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^n(n^2-5n+\log n)}{n!(2n^2+1)} = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{\log(n)}{n^2}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} = \\ &= \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{5}{n}+\frac{\log(n)}{n^2}}{1+\frac{1}{2n^2}}\,. \end{aligned}$$

Osservando che, per la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty\,, \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = 0\,, \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{n}+\frac{\log(n)}{n^2}}{1+\frac{1}{2n^2}} = 1\,, \end{aligned}$$

segue che la successione a_n diverge a $+\infty$.

(4). Ricordando che

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

otteniamo

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\,.$$

Pertanto, trattandosi del rapporto di due polinomi dello stesso grado, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4+\log n+1}\,;$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\,;$$

$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}}\right)^{n}\,.$$

Soluzione. (1). Osservando che

$$n^4+\log(n)+1 = n^4\left(1+\frac{\log(n)}{n^4}+\frac{1}{n^4}\right)\,,$$

possiamo scrivere la successione come

$$a_n = \sqrt[n]{n^4}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{\log(n)}{n^4}+\frac{1}{n^4}}\,.$$

Poichè $1+\frac{\log(n)}{n^4}+\frac{1}{n^4}\to 1$, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{\log(n)}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = 1\,.$$

Inoltre, ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n^b}\to 1$ per ogni $b\in\mathbb{R}$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4} = 1\,.$$

Mettendo insieme questi risultati segue che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

(2). Riscrivendo la successione come

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!\cdot\frac{n^2+1}{n}\cdot\frac{1}{n!}} = \alpha_n^{\beta_n}\,,$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\,, \\ \beta_n &= \frac{n^2+1}{n}\cdot\frac{1}{n!}\,, \end{aligned}$$

basta osservare che:

- $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e$ (limite notevole);
- $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n!}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 0$ dal momento che $1+\frac{1}{n^2} \to 1$ e $\frac{n}{n!} \to 0$ (limite notevole).

Conseguentemente, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{\beta_n} = e^0 = 1\,.$$

Pertanto il limite richiesto esiste e vale 1.

(3). Riscriviamo opportunamente la successione come segue:

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^{\frac{n}{\alpha_n}}, \tag{1.1}$$

dove

$$\alpha_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}.$$

Analizziamo separatamente i vari termini che compaiono nella (1.1):

- relativamente ad α_n abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{n^2} = +\infty\,, \tag{1.2}$$

  poichè $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2 > 1$ ed $n^2 \to +\infty$;
- da (1.2) otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e\,; \tag{1.3}$$

- dimostriamo infine che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = +\infty\,. \tag{1.4}$$

  Dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = e^2 > 1\,,$$

  fissato arbitrariamente $A \in (1, e^2)$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} \geq A$$

  per ogni $n \geq \bar{n}$. Ricordando la definizione di α_n, segue quindi che

$$\frac{\alpha_n}{n} \geq \frac{A^{n^2}}{n} \geq \frac{A^n}{n} \tag{1.5}$$

  per tali n. Pertanto (1.4) segue da (1.5) e dal teorema del confronto, osservando che $\frac{A^n}{n} \to +\infty$ per $n \to +\infty$ (si osservi che $A > 1$!).

Mettendo insieme (1.1) e (1.3)–(1.4), otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^{\frac{n}{\alpha_n}} = e^0 = 1\,.$$

Esercizio 5. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left[\log(n+1) - \frac{1}{2}\log(n^2+7)\right] ;$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} (n^2+1)\sin(n)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) ;$$

$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}\right)} ;$$

$$(4) \qquad \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(e^{\frac{1}{n!}}-1\right) ;$$

$$(5) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n^3}}-1} .$$

Soluzione. (1). Basta osservare che

$$\alpha_n = \left[\log(n+1) - \frac{1}{2}\log(n^2+7)\right] = \log\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right) ,$$

dove

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}} = 1 .$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}}\right) = \log(1) = 0 .$$

(2). Iniziamo con l'osservare che

$$\alpha_n = (n^2+1)\sin(n)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{n^2+1}{n^6}\sin(n)\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^6}} . \tag{1.6}$$

Analizziamo separatamente i diversi termini nella (1.6):

- ricordando che per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, si ha $\frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} \to \frac{1}{2}$, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} ; \tag{1.7}$$

- dal momento che $\frac{n^2+1}{n^6} \to 0$ e la successione $\sin(n)$ è limitata (pur non essendo convergente), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^6}\sin(n) = 0 . \tag{1.8}$$

Da (1.7)–(1.8) segue facilmente che il limite richiesto esiste e vale zero.

(3). Si ha

$$\alpha_n = \frac{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}\right)} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}}{\sin\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}} = \tag{1.9}$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}}{\sin\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}\right)} \cdot \frac{n^2}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}\,.$$

Studiamo separatamente i diversi termini nella (1.9):

- ricordando il limite notevole $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \to 1$ per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} = 1\,; \tag{1.10}$$

- poichè $\frac{\sqrt{n}+1}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, ricordando il limite notevole $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$ per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}}{\sin\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}\right)} = 1\,; \tag{1.11}$$

- infine,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(\sqrt{n}+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = +\infty\,. \tag{1.12}$$

Mettendo insieme (1.9) con (1.10)–(1.12), segue che il limite richiesto esiste e vale $+\infty$.

(4). Riscrivendo la successione come

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n!}}-1}{\frac{1}{n!}}\,,$$

grazie ai limiti (notevoli)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n!}}-1}{\frac{1}{n!}} = 1\,,$$

segue che il limite richiesto esiste e vale zero (si ricordi infatti che per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, si ha $\frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 0$).

(5). Si ha

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n^3}}-1} = \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^3}}-1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \\
&= \frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^3}}-1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\,.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Ricordando i lmiti notevoli $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \to 1$, $\frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1$ e $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$ per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, otteniamo

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1\,, \tag{1.14}
$$

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^3}}-1} = 1\,, \tag{1.15}
$$

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1\,, \tag{1.16}
$$

da cui

$$
\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 1\,.
$$

Esercizio 6. Stabilire se le seguenti successioni ammettono limite oppure no, e quando possibile calcolarlo:

$$
(1)\qquad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari}\,, \\ \frac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari}\,; \end{cases}
$$

$$
(2)\qquad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari}\,, \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \text{se } n \text{ è dispari}\,; \end{cases}
$$

$$
(3)\qquad \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\log(2n+\sin(n))\,.
$$

Soluzione. (1). La successione non ammette limite. Infatti le due sottosuccessioni che si ottengono per n pari e per n dispari tendono a due limiti ($l_1 = 0$ ed $l_2 = 1$, rispettivamente) diversi.

(2). Si osservi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,,
$$

$$
\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,.
$$

Quindi, mettendo insieme queste relazioni, otteniamo

$$
0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,.
$$

Ne segue che la successione in esame converge a zero per il Teorema del confronto.

(3). Il limite richiesto non esiste. Per vederlo basta considerare le due sottosuccessioni che si ottengono per n pari e per n dispari. Infatti si ha:

$$a_{2n} = \log(4n+\sin(2n)) = \log\left(4n\left(1+\frac{\sin(2n)}{4n}\right)\right) = \log(4n)+\log\left(1+\frac{\sin(2n)}{4n}\right),$$

dove

$$\log(4n) \to +\infty$$

e

$$\log\left(1+\frac{\sin(2n)}{4n}\right) \to \log(1) = 0\,;$$

quindi $a_{2n} \to +\infty$. Invece:

$$a_{2n+1} = -\log(4n+2+\sin(2n+1)) = -\log(4n) - \log\left(1+\frac{2+\sin(2n+1))}{4n}\right),$$

dove

$$\log(4n) \to +\infty$$

e

$$\log\left(1+\frac{2+\sin(2n+1)}{4n}\right) \to \log(1) = 0\,;$$

quindi $a_{2n+1} \to -\infty$.