Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 5

Esercizio 1) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\pi}{n^2+n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2\arctan(n^2+1)}{n^2+n+\cos^2(n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3+5}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Esercizio 2) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n!)}{(n+1)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

Esercizio 3) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(3n-\sqrt[3]{27n^3-3}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\sqrt{n})^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{1+3^n}\right) \frac{n!}{n^n}$$

Esercizio 4) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n+2}}{n^2+5}$$

Esercizio 5) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^x \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^{2n}}{2^n+1}\right).$$

Esercizio 6) Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(3n)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{nx}}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n^2}\,.$$

Esercizio 7) Studiare al variare di $x > 0$ il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\log n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}\,.$$

Esercizio 8) Dimostrare che per ogni $p > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < +\infty$$

Esercizio 9) Siano a_n e b_n tali che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < +\infty$. Dimostrare che le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

sono convergenti.

Esercizio 10) Sia $a_n > 0$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

- Dimostrare che per ogni $p > \frac{1}{2}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$$

  è convergente.

- Dimostrare con un controesempio che il risultato non vale se $p = \frac{1}{2}$: ovvero, trovare una successione $\{a_n\}$ a termini positivi tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ è divergente.