Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 4

1) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+2}{n}},\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(2n)!}},\quad \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right),\quad \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3^n\left(2^{\frac{1}{n!}}-1\right)\quad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{2+4+6+...+2n}-n\right]$$

2) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore (e stabilire se esistono massimo e minimo) delle seguenti successioni

$$a_n=\frac{n-10}{n^2+1},\qquad b_n=e^{n-3}-n.$$

3) Trovare una successione che ammette tre sottosuccessioni che convergono a limiti diversi.

4) Dimostrare che se $a_{2n}\to a$ e $a_{2n+1}\to a$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n=a$.

5) Determinare se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o non convergenti:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{(2k)!},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^2}\right),$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{k}\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right],\quad \sum_{k=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{k}}-1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

6) Data la serie $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

- dimostrare che $b_n=a_{2n}-a_n>1/2$;
- dedurre che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$;
- dimostrare che $b_n\to l\in(1/2,1]$.