

Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 3

1) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$n^n \geq 2^{n-1}n!$$

(sugg. si usi la disuguaglianza di Bernoulli)

2) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 3}}{3n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt[3]{n^3 + 2}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 4n^4 + 1}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n n^2}{4^n - n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \sqrt{n} + 3}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n+1}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^3}}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2n^2 + 1}\right)^{3n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \log \left(1 + \frac{n}{n^2 + 2n + 1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\log(n) - \frac{1}{2} \log(n^2 + 1)\right] \sin n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos^2(1 + n^2)}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + n}{4^n + n^2 \sin n} \quad \frac{\cos(n+1) \sin(1/n)}{n^3 + n}$$

3) Dato $a > 0$, calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n + \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a)^n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{n^a + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^a} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin(n^{-a}) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + n^a)$$

4) Fornire esempi di successioni che verificano le seguenti proprietà:

- $\{a_n\}$ è crescente;
- $\{a_n\}$ è decrescente;
- $\{a_n\}$ non è monotona;
- $\{a_n\}$ è monotona e convergente;
- $\{a_n\}$ è monotona e illimitata;
- $\{a_n\}$ è convergente e non monotona;
- $\{a_n\}$ non è limitata né superiormente né inferiormente;
- $\{a_n\}$ è limitata e non convergente;
- $\{a_n\}$ è limitata superiormente e non inferiormente;
- $\{a_n\}$ è limitata inferiormente e non superiormente.