Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 2

1) Stabilire se le seguenti successioni hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, $\quad a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$,

$a_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $a, b, c, d, \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad a_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}$,

$a_n = \frac{\sin(n)}{n}$, $\quad a_n = n - \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$a_n = (-1)^n + n$, $\quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

$a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, $\quad a_n = \cos n$,

$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se n é pari} \\ \frac{n-1}{n} & \text{se n é dispari} \end{cases}$ $\quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se n é pari} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \text{se n é dispari} \end{cases}$

2) Verificare, usando la definizione, che le seguenti successioni tendono al limite indicato:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3n}{n+2} = +\infty$,

$\lim_{n\to+\infty}(3\sqrt{n} - 4n) = -\infty$, $\quad \lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2-1} = 0$.

3) (i) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, allora $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$.
(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = l \geq 0$, cosa si può dire sulla successione $\{a_n\}$?

4) Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x-1}{x+1}\right| > x - 1\right\} ; \; B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+|x-2|}{x^2-|x-1|} < 1\right\} ;$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \sqrt{x^2+2x-3} > 0\right\} .$$

5) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

(1) $n! \geq 2^{n-1}$, $\quad$ (2) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(3) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\quad$ (4) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$.