Corso di laurea in Matematica a.a. 2013/2014
Calcolo 1
Scheda 1

1) Determinare se ciascuno dei seguenti insiemi è limitato e se ammette massimo e/o minimo. Calcolare inoltre l'estremo superiore e l'estremo inferiore.

$3.a)\ \{x \in \mathbb{R} : |x+2| > 4\}$ $\quad$ $3.b)\ \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq 3\}$

$3.c)\ \mathbb{N} \cap \left(-\frac{10}{3}, 5\right)$ $\quad$ $3.d)\ \{x \in \mathbb{R} : ||x|-1| < 2\}$

$3.e)\ \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 4, x^2 - 5x > -4\}$ $\quad$ $3.f)\ \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq \sin x\right\}$

$3.g)\ \left\{x = \frac{n^2+4}{n^2+6}, n \in N\right\}$ $\quad$ $3.h)\ \left\{x = n^{(-1)^n}, n > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$

$3.i)\ \left\{x = \frac{3n^2}{4n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad$ $3.l)\ \left\{x = \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$3.m)\ \bigcup_{n\geq 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ $\quad$ $3.n)\ \bigcap_{n\geq 1} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

2) Disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni

$$2.a)\ f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| \qquad 2.b)\ f(x) = |1-x| - x$$

3) Dimostrare che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\inf A = -\sup(-A)$.

4) Dimostrare che se $r \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e, se $r \neq 0,\ r\,x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5) Dimostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

6) Dimostrare la seguente formulazione equivalente del *principio di induzione*:
data la famiglia di proposizioni $\{P_n\}$, se
(i) P_1 è vera
(ii) supponendo $P_1, \ldots, P_n$ vere si ottiene che P_{n+1} è vera
allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

7) Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ammette minimo.

8) Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.