Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente E. Carlini
Quinto appello: 21 Gennaio 2015

Esercizio 1 Data l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) + x^2 u_x(x,y,t) + y u_y(x,y,t) = \sin(x)\cos(y) & (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \times (0,T) \\ u(x,y,0) = \sin(x)\cos(y) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \end{cases}$$

(a) Si approssimi l'equazione con lo schema UP-wind e se ne studi la stabilità nella norma infinito (ponendo a 0 la forzante a destra dell'uguaglianza).

(b) Si consideri ora il dominio $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ e si aggiungano delle condizioni sul bordo inflow, in modo che la soluzione esatta resti almeno continua. Come bisogna scegliere il passo temporale, rispetto a quello spaziale, affinchè la soluzione numerica rimanga stabile?

Esercizio 2 Si consideri l'equazione diffusione reazione

$$\begin{cases} -u''(x) + (2-x)u = sin(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Ricavare la formulazione debole del problema e dimostrare che il problema è ben posto.

(b) Scrivere il sistema lineare corrispondente all'approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari.

(c) Verificare che il sistema lineare ottenuto ammette soluzione unica.

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f(x,t) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, t = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato e n indica la normale esterna, $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

(a) Scrivere la formulazione variazionale del problema continuo.

(b) Derivare uno schema totalmente discreto di ordine 2 in spazio e tempo, tramite approssimazione di Galerkin e θ metodo.

(c) Analizzare la stabilità dello schema ottenuto (supponendo $f = 0$).