Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente E. Carlini
Terzo appello: 23 Settembre 2014

Esercizio 1 Si consideri lo schema:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_1(x_i, y_j)(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_2(x_i, y_j)(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \\ u_{i,j}^0 = u_0(x_i, y_j) \end{cases}$$

dove $a_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u_{i,j}^n$ rappresenta la soluzione discreta tale che $u_{i,j}^n \simeq u(x_i, y_j, t_n)$, (x_i, y_j, t_n) indicano i nodi di una griglia uniforme di passo Δx in spazio e Δt in tempo e u indica la soluzione del probelma differenziale continuo

(a) Studiare la consistenza dello schema

(b) Studiare la stabilità dello schema nelle norme matriciali $||\cdot||_\infty$, dove $||B||_\infty = \sup_i \sum_j |b_{i,j}|$

Esercizio 2 Si consideri l'equazione diffusione reazione

$$\begin{cases} -\mu u''(x) + \sigma u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

dove $f \in C^4([0,1])$ e $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0, \sigma > 0$.

(a) Ricavare la formulazione debole del problema e dimostrare che il problema è ben posto.

(b) Scrivere il sistema lineare corrispondente all'approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari.

(c) Sapendo che la soluzione esatta $u \in H^2(0,1)$, dare una stima di convergenza dell'approssimazione ottenuta. Commentare la stima nel caso $\sigma >> \mu$.

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \mu u_{xx}(x,t) + \sigma u(x,t) = f(x) & \text{per } x \in (0,1),\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1 & \text{per } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } x \in (0,1) \end{cases}$$

dove $f \in C^4([0,1])$, $u_0 \in C([0,1])$, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0, \sigma > 0$.

(a) Scrivere la formulazione debole del problema continuo.

(b) Ricavare la semidiscretizzazione di Galerkin in spazio mediante elementi finiti e la sua corrispondente forma matriciale.

(c) Applicare il $\theta - metodo$ con $\theta = 0$ per ottenere un'approssimazione totalmente discreta. Per quali valori di Δt il metodo risulta stabile?