Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente E. Carlini
Terzo appello: 9 Settembre 2014

Esercizio 1 Data l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + a \cdot \nabla u = 0 & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{1}$$

dove $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(a) Scrivere il metodo Up-Wind in dimensione 2 applicato all'equazione (1) e dimostrare che il metodo è stabile nella norma $\| \cdot \|_\infty$.

(b) Si consideri ora l'equazione del trasporto (1) su un dominio limitato Ω, ad esempio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, e si supponga $a(x, y) = (a_1, a_2)$ con a_1 e a_2 costanti positive. Che condizioni al bordo sono necessarie affinchè il problema risulti ben posto? Scrivere lo schema Up-Wind per l'equazione (1) su Ω con le opportune condizioni al bordo.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione diffusione reazione

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x) & \text{per } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

dove $a, c, f \in C^4(\mathbb{R})$ e $a(x) > a_0$.

(a) Ricavare la formulazione debole del problema e dimostrare che il problema è ben posto.

(b) Scrivere il sistema lineare corrispondente all'approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari, si usi una formula di quadratura per l'approssimazione degli integrali.

(c) Sapendo che la soluzione esatta $u \in H^2(0, 1)$, dare una stima di convergenza dell'approssimazione ottenuta.

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, t = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato e n indica la normale esterna.

(a) Scrivere la formulazione variazionale del problema continuo.

(b) Ricavare la semidiscretizzazione di Galerkin in spazio mediante elementi finiti e la sua corrispondente forma matriciale.

(c) Applicare il $\theta - metodo$ con $\theta = 1$ per ottenere un'approssimazione totalmente discreta. Per quali valori di Δt il metodo risulta stabile?