Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente E. Carlini
Secondo appello: 8 Luglio 2014

Esercizio 1 Data l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + a \cdot \nabla u = 0 & (x,t) \in (0,1) \times (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,1) \times (0,1) \end{cases}$$

dove $a = (a_1, a_2)$ con a_1, a_2 costanti positive.

(a) Scrivere il metodo di Lax-Friedrichs in dimensione 2 e dimostrare che il metodo è consistente.

(b) Generalizzare lo schema al caso di velocità che dipende anche da (x,t), $a(x,t) = (a_1(x,t), a_2(x,t))$, e dimostrare che è stabile nella norma $\|\cdot\|_\infty$, ricavando la condizione CFL.

Esercizio 2 Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + bu' = 1 & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = \alpha & u(1) = \beta. \end{cases}$$

dove $\varepsilon, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$.

(a) Ricavare la formulazione debole del problema e dimostrare che il problema è ben posto.

(b) Scrivere il sistema lineare corrispondente all'approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari.

(c) Supponendo la soluzione esatta $u \in H^2(0,1)$, dare una stima di convergenza del metodo. Commentare la stima nel caso $|b| >> \varepsilon$.

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, t = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato e n indica la normale esterna, $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

(a) Scrivere la formulazione variazionale del problema continuo.

(b) Scrivere la semidiscretizzazione di Galerkin in spazio mediante elementi finiti e la sua corrispondente forma matriciale.

(c) Applicare il $\theta - metodo$ con $\theta = 0$ per ottenere un'approssimazione totalmente discreta. Analizzare la stabilità dello schema ottenuto.