Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente E. Carlini
Primo appello: 17 Giugno 2014

Esercizio 1 Data l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + a \cdot \nabla u = 0 & (x,t) \in (0,1) \times (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,1) \times (0,1) \end{cases}$$

dove $a = (a_1, a_2)$ con a_1, a_2 costanti positive.

(a) Ricavare il metodo di Lax-Wendroff in dimensione 2.

(b) Ricavare il coefficiente di amplificazione del metodo di Lax-Wendroff in dimensione 1. Ricavare la condizione su Δt per la quale il metodo è stabile in norma L_2 discreta. (Per semplificare i calcoli, si ricordano le identità $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ e $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$).

Esercizio 2 Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \sigma u = \cos(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ u'(0) = 1 & u(1) = 0. \end{cases}$$

dove $\varepsilon, \sigma \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$.

(a) Ricavare la formulazione debole del problema.

(b) Scrivere il sistema lineare corrispondente all' approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari.

(c) Supponendo ora condizioni al bordo di tipo Neumann, $u'(0) = 1$ $u'(1) = 1$, scrivere il sistema lineare dell'approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari. Come cambia il sistema rispetto al caso precedente? Che condizioni deve verificare σ affinchè il sistema lineare associato sia ben posto?

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x) = g(x) & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

(a) Scrivere la formulazione variazionale del problema continuo.

(b) Supponendo $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, mostrare che il problema ammette un'unica soluzione $u \in H^1(\Omega)$.

(c) Supponendo $g = 0$, scrivere la discretizzazione di Galerkin mediante elementi finiti $\mathbb{P}_1$ su una triangolazione di Courant, usando la formula di quadratura dei vertici.