Metodi Numerici per le EDP
A.A.2013-14
Argomenti svolti a lezione
Docente E.Carlini

6-13 Marzo 2014 (6 ore)
Metodi alle differenze finite per problemi Iperbolici lineari
Descrizione delle formule di rappresentazione della soluzione per l'equazione del trasporto unidimesnionale su $\mathbb{R}$. Definizione soluzione debole. Teorema di esistenza e unicità e regolarità (solo enunciato). Buona posizione del problema su domini limitati di $\mathbb{R}^d$, con $d = 1$ e $d = 2$. Definizione di schema numerico a un passo esplicito ed errore di troncamento. Definizione di consistenza. Schema di tipo Up-wind, Lax Friedrichs e Lax Wendroff nel caso dimensione spaziale $d = 1$ (richiami dal corso IAN) e $d = 2$. Analisi di consistenza dei metodi. Definizione di stabilità di uno schema numerico rappresentato in forma vettoriale. Analisi di stabilità del metodo up-wind, nel caso di dimensione $d = 1$ e $d = 2$.

18-20 Marzo 2014 (4 ore)
Condizione Courant-Friedrichs-Levy. Stablità L_2 tramite Analisi di Von-Neumann (richiami dal corso IAN). Coefficienti di Amplificazioni dei metodi alle differenze finite. Fenomeni di dissipazione e dispersione. Analisi errori di dissipazione e dispersione in dettaglio per lo schema Up-wind.
Laboratorio (scheda 1, problemi iperbolici): calcolo numerico degli errori di dissipazione e dispersione per gli schemi Up-wind, Lax Friedrichs e Lax Wendroff, caso $d = 1$.

25-27 Marzo 2014 (4 ore)
Equazioni equivalenti al primo, secondo e terzo ordine per gli schemi Up-wind, Lax Friedrichs e Lax Wendroff. Teorema di convergenza di Lax-Ritchmeyer (dimostrazione solo del caso: sufficienza della stabilià per la convergenza). Osservazione schema Up-wind: interpretazione come schema di tipo Semi-Lagrangiano.
Laboratorio su problemi iperbolici (scheda 1) : calcolo numerico degli ordini di convergenza Up-wind, Lax Friedrichs e Lax Wendroff, caso $d = 2$.

1-3 Aprile 2014 (4 ore)
Metodi alle differenze finite per problemi ellittici lineari
Approssimazione del problema di Poisson basato su Laplaciano discreto a 5 e 9 punti. Metodo di Gauss-Seidel per approssimare il sistema lineare associato. Consistenza, stabilità e convergenza degli schemi alle differenza finite

per problemi ellittici lineari.
Laboratorio su problemi ellittici con differenze finite (scheda 2): schemi alle differenze finite per il problema di Poisson e Diffusione Trasporto in dimensione 2.

8-10 Aprile 2014 (4 ore)
Approssimazione di Galerkin per problemi ellittici lineari.
Formulazione debole di equazioni di tipo ellittico. Lemma di Lax-Milgram (solo enuncitao). Condizioni Dirichlet, Neumann, miste. Approssimazione di Galerkin. Lemma di Cèa e convergenza. Metodo Galerkin con elementi finiti in dimensione 1. Spazio e funzioni continue lineari e quadratiche a tratti.

15 Aprile 2014 (2 ore)
Esempio: approssimazione Galerkin con elementi finiti lineari per il problema diffusione reazione in dimensione 1. Stima Interpolazione in dimensione 1 nella norma L^2 e semi-norma H^1. Stime d'errore per l'approssimazione di Galerkin con elementi finiti in dimensione 1.

6-8 Maggio 2014 (4 ore)
Tecniche di stabilizzazione per Approssimazione di Galerkin con elementi finiti lineari per il problema diffusione trasporto in dimensione 1, con termine trasporto dominante. Problemi di Galerkin generalizzati (cenni). Problemi uniformemente ellittici in dimensione 2. Definizione soluzioni deboli. Teoremi di esistenza, unicità e regolarità (solo enunciato). Operatore traccia, Teorema di Traccia (solo enunciato).

13-15 Maggio 2014 (4 ore)
Richiami di Teoremi esistenza unicità e regolarita soluzioni deboli per problemi ellittici. Formulazione debole problema di Poisson con condizioni miste in dimensione 2. Metodo degli Elementi finiti caso bidimensionale. Definizione di triangolazione regolare. Definizione di elementi finito Lagrangiano. Propietà di unisolvenza.
Laboratorio su problemi ellittici con elementi finiti(scheda 3): schemi agli elementi finiti per il problema di Poisson ($\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$) e Diffusione Trasporto in dimensione 1.

20-22 Maggio 2014 (4 ore)
Approssimazione di Galerkin del Problema di Poisson in dimensione 2 con elementi finiti. Trattamento di condizioni al bordo di Dirichlet e miste. Condizionamento matrice di stiffness (cenni). Operatore di Interpolazione. Stima errore di interpolazione (Solo enunciato).

Laboratorio su problemi ellittici con elementi finiti in dimensione 2 tramite l'uso di Freefem (scheda 4).

27-29 Maggio 2014 (4 ore)
Costruzione matrice di stifness, relativa al problema di Poisson sul quadrato unitario con condizione Dirichlet nulle, su una griglia di Courant. Formule di quadratura dei vertici e dei punti medi.
Approssimazione di Galerkin per problemi parabolici lineari.
Equazioni Paraboliche. Formulazione debole. Teorema esistenza e unicità soluzioni deboli (solo enunciato). Semidiscretizzazione in spazio tramite metodo di Galerkin. Analisi di convergenza del metodo semi discreto.

3-5 Giugno 2014 (4 ore)
Approssimazione completamente discreta con metodo di Galerkin agli Elementi finiti per problemi parabolici. Theta-metodi. Analisi di stabilità di Eulero implicito. Stabilità condizionata per i Theta-metodi. Teorema di convergenza per la soluzione dello schema semi-discreto alla soluzione dello schema completamente discreto (Solo enunciato).
Laboratorio (scheda 5, problemi parabolici): schemi di approssimazione agli elementi finiti (spazio) e Theta metodi(tempo) con Free-fem .

10-12 Giugno 2014 (4 ore)
Metodi Leve-Set per la propagazione dei fronti. Condizione di Entropia e Soluzioni deboli (Cenni). Formulazione Level-Set. Equazioni eiconale evolutiva e soluzioni viscosità continue. Teorema di esistenza e unicità, Principio del confronto (solo enunciati). Approssimazione numerica. Schema centrato (instabile) e decentrato (stabile). Analisi di Convergenza. Monotonia. Teorema di Barles-Souganidis. Simulazioni numeriche.

Modalità dell'esame

La valutazione finale terrà conto dei seguenti elementi:

1.Risultato della prova scritta

2.Valutazione dell'attività svolta in Laboratorio con discussione dei programmi e relative domande di teoria

Il corso prevede una parte di esercitazioni al Laboratorio per l'implementazione degli algoritmi in C++/Matlab/FreeFem . Questa parte si conclude con la consegna di alcuni programmi, dopo ogni scritto.
I programmi richiesti per svolgere la prova 2 sono quelli delle schede in rete nella pagina del corso. *(Esercizi per il Laboratorio su Pb. iperbolici, Eser-*

cizi per il Laboratorio su Pb. ellittici con Differenze finite in dimensione 2, Esercizi per il Laboratorio su Pb. ellittici con elementi finiti in dimensione 1, Esercizi per il Laboratorio su Pb. ellittici con elementi finiti in dim 2,Esercizi per il Laboratorio su Pb. parabolici con elementi finiti in dim 2.)
Tutti i programmi devono essere presentati con la rappresentazione grafica della soluzione e, ove possibile, la sovrapposizione tra soluzione esatta e soluzioni approssimate.
La prova in Laboratorio con relativa prova orale si svolge di solito nei giorni immediatamente successivi alla prova scritta.