Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n.4: Problemi parabolici

1. *Disuguaglianza di Young*
   Dimostrare che se a e b sono due numeri reali positivi allora per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$ab < \frac{1}{4\epsilon}a^2 + \epsilon b^2$$

2. Si dimostri che la matrice di massa $M = (m_{i,j})$, dove $m_{i,j} = \int \varphi_i \varphi_j$ e $\{\varphi_i\}$ funzioni base di uno spazio di elementi finiti è definita positiva.

3. Si consideri il problema parabolico nel dominio $Q = (-a, a) \times (t_0, T]$

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = 0 & (x,t) \in Q \\ u(\pm a, t) = -R(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{a^2}{4\mu t}} & (t) \in (t_0, T] \\ u(x, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t_0}} \end{cases}$$

   dove μ è una costante positiva e $0 < t_0 < T$.

   (a) si ricavi la formulazione debole introducendo una funzione di rilevamento del dato al bordo costante in spazio, $\overset{\circ}{u} = u + R(t) \in H_0^1((-a, a))$. Si dimostri che il problema è ben posto (la forma bilineare è coerciva e continua)

   (b) verificare che la soluzione esatta è $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}$.

   (c) si discretizzi in spazio il problema con elementi finiti lineari ed in tempo tramite lo schema di Eulero esplicito. Scrivere esplicitamente il sistema lineare risultante dalla discretizzazione.

4. Si consideri il problema parabolico nel dominio $Q = (0, 1) \times (0, 5)$

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{\pi^2} u_{xx} - 3u = 0 & (x,t) \in Q \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (t) \in (0, 5] \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

   (a) si ricavi la formulazione debole e si dimostri che il problema è ben posto (la forma bilineare è debolmente coerciva e continua). (*Una forma bilineare* $a(\cdot,\cdot)$ *è debolmente coerciva se esistono* $\alpha > 0$ *e* $\lambda \geq 0$ *tali che* $a(v,v) + \lambda \, |v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|^2_V$ *per ogni* $v \in V$)

   (b) si ricavi l'approssimazione di Galerkin con Eulero esplicito. Si discuta per quali valori di Δt tale approssimazione risulta stabile in norma L^2, in funzione degli autovalori della matrice $M^{-1}A$ dove M indica la matrice di massa ed A di stiffness.