Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 5
Problemi parabolici

Approssimare i seguenti problemi tramite il metodi di Galerkin-Elementi Finiti, con l'uso di `Freefem` .

1. Si consideri il problema parabolico nel dominio $Q = \Omega \times (0,1)$ dove $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (x,t) \in Q \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,1] \\ u(x,0) = \sin(2x_1)\sin(2x_2) & x \in \Omega \end{cases}$$
la cui soluzione esatta è $u(x_1, x_2, t) = e^{-8t}\sin(2x_1)\sin(2x_2)$

   (a) se ne approssimi la soluzione con Elementi Finiti $\mathbb{P}_2$ in spazio e Crank-Nicolson in tempo,

   (b) scegliendo come passi di discretizzazione $h = 0.05, \Delta t = 0.05$, $h = 0.025, \Delta t = 0.025$,$h = 0.0125, \Delta t = 0.0125$ si calcoli l'errore verificando la stima di convergenza nota dalla teoria.

2. Si consideri il problema parabolico nel dominio $Q = \Omega \times (0,T)$ dove $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$
$$\begin{cases} u_t - \epsilon\Delta u + b\nabla u = 0 & (x,y,t) \in Q \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = 0 & x \in \Omega \end{cases}$$
con $b(x_1, x_2) = (x_2(1 - x_1^2), -x_1(1 - x_2^2))$
$$\varphi = \begin{cases} 1 & x_1 = -1 \quad -1 \le x_2 \le 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) se ne approssimi la soluzione con Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ in spazio ed Eulero implicito in tempo,

   (b) variare i parametri ϵ e T, ad esempio $\epsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ e $T = 1, 10, 50$.

3. Si consideri il problema parabolico nel dominio $Q = \Omega \times (0,1)$ con $\Omega = S_{0.75}(-0.5, 0) \cup S_{0.75}(0.5, 0)$, dove $S_r(x_0, y_0)$ rappresenta un cerchio di $\mathbb{R}^2$ centrato in (x_0, y_0) e raggio r e $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x_1 \ge 0\}$ e $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{x_1 < 0\}$,
$$\begin{cases} u_t - 0.1\Delta u = 0 & (x,t) \in Q \\ u(x,t) = 1 & (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,1] \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,1] \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$
dove $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
se ne approssimi la soluzione con Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ in spazio ed Eulero implicito in tempo.