Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n.3: Problemi ellittici, approssimazione agli elementi finiti

1. Si consideri l'equazione di Poisson
$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
dove Ω è un dominio aperto regolare e limitato in $\mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.
   (a) si ricavi la formulazione debole e dimostrare che la soluzione esiste ed è unica;
   (b) si ricavi una stima di convergenza del metodo Galerkin-Elementi finiti $\mathbb{P}_1$.

2. Si consideri l'equazione di Reazione Diffusione nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$
$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
dove $\varphi = \exp(x+y)$.
   (a) si ricavi la formulazione debole dimostrando che la soluzione esiste ed è unica;
   (b) si ricavi una stima di convergenza del metodo Galerkin-Elementi finiti $\mathbb{P}_2$.

3. Si consideri l'equazione di Reazione Diffusione nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$
$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = 0 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
dove $f = \sin(x+y)$, si ricavi esplicitamente il sistema lineare derivante dall'approssimazione Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ associata alla triangolazione di Courant.

4. Considerare il triangolo K di vertici $(0,0)$,$(1,0)$,$(\frac{1}{2},l)$ e la funzione $v(x,y) = x^2$. Verificare che l'operatore di interpolazione locale su K di v è $\Pi^1 v(x,y) = x - \frac{y}{4l}$. Come si scrive, l'operatore di interpolazione locale su K di v di grado 2?

5. Verificare che la formula di quadratura dei vertici I_1 e dei punti medi I_2 sono esatte rispettivamente in $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$
$$I_1(f) := \frac{|K|}{3}\sum_{i=1}^{3} f(a_i), \quad I_2(f) := \frac{|K|}{3}\sum_{i=1}^{3} f(a_i^m)$$
dove K indica un elemento triangolare di una griglia bidimensionale, a_i i suo vertici e a_i^m i punti medi dei lati $i = 1,2,3$.

6. Si consideri l'equazione di Reazione Diffusione Trasporto nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mu\nabla u) + b\nabla u + \sigma u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = 0 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
con $\mu, \sigma \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(x) \geq \mu_0$, $b \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, div(b) $\in$ L$^\infty$, $f \in L^2(\Omega)$.
   (a) Si ricavi la formulazione debole e si dimostri che la soluzione esiste unica, se $(\sigma - \frac{\mathrm{div(b)}}{2}) \geq 0$.
   (b) Si ricavi l'approssimazione di Galerkin con elementi finiti $\mathbb{P}_1$