Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 4: Approssimazione Galerkin-Elementi finiti per Problemi ellittici in dimensione due

Approssimare i seguenti problemi tramite il metodi di Galerkin-Elementi Finiti, con l'uso di `Freefem` .

1. Si consideri l'equazione di Poisson nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

   dove $f(x,y) = 32\pi^2 \cos(4\pi x)\sin(4\pi y)$ e $\varphi = \sin(4\pi y)$.

   (a) se ne approssimi la soluzione con il metodo Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$;

   (b) si verifichi l'andamento dell'errore nella norma H^1 al variare di h, considerando che la soluzione analitica del problema è $u(x,y) = \cos(4\pi x)\sin(4\pi y)$.

2. Si consideri l'equazione di Laplace nel dominio $\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le r < 1,\ 0 < \theta < \frac{3}{2}\pi\}$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = 0 & (x,y) \in \Gamma_D \\ u = g_N & (x,y) \in \partial\Omega \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

   dove $\Gamma_D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ \theta = 0, \theta = \frac{3}{2}\pi\}$, e $g_N = sin(\frac{2\theta}{3})$;

   (a) se ne approssimi la soluzione con il metodo Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$;

   (b) si verifichi l'andamento dell'errore nella norma H^1 al variare di h, considerando che la soluzione analitica del problema è $u(r,\theta) = r^{2/3}\sin(\frac{2\theta}{3})$.

   Suggerimento: (θ, r) indicano le coordinate polari e (x,y) le coordinate cartesiane. Usare il comando `atan2(y,x)` per trasformare θ in coordinate cartesiane. Attenzione : `atan2(y,x)`) è definito su $(-\pi,\pi]$, per estenderlo a $(0,2\pi]$ aggiungere 2π ai valori negativi.

3. Si consideri l'equazione di Reazione Diffusione nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

   dove $\varphi = \exp(x+y)$.

   (a) se ne approssimi la soluzione con il metodo Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$,

   (b) si verifichi l'andamento dell'errore nella norma H^1 al variare di h, considerando che la soluzione analitica del problema è $u(x,y) = \exp(x+y)$,

   (c) si approssimi la soluzione su un dominio di forma a vostra scelta Ω regolare con un buco (è necessario aggiungere anche le condizioni al bordo interno del dominio).

4. Si consideri l'equazione di Diffusione Trasporto nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{cases} -\Delta u + b\nabla u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = g_D & (x,y) \in \Omega \setminus \Gamma_N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_N & (x,y) \in \Gamma_N \end{cases}$$

dove $b = (1,1)$, $\Gamma_N = \{0\} \times (0,1)$, $f = 4\pi^2(\sin(2\pi(x+y)) + \sin(2\pi(x-y))) + 2\pi\cos(2\pi(x+y))$, $g_D = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$ e $g_N = -2\pi\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$

   (a) se ne approssimi la soluzione con il metodo Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$;

   (b) si verifichi l'andamento dell'errore nella norma H^1 al variare di h, considerando che la soluzione analitica del problema è $u(x,y) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$.

5. Si consideri l'equazione di Diffusione Trasporto Reazione nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta b\nabla u + u = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove $b = (1,1)$ e

$$\varphi = \begin{cases} 1 & x = 0 \quad 0 < y < 1, \\ 1 & y = 0 \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

se ne approssimi la soluzione con il metodo Galerkin-Elementi Finiti $\mathbb{P}_1$ per valori di $\beta = 1, 10, 10^3$.