Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 3: Approssimazione Galerkin-Elementi finiti per Problemi ellittici in dimensione uno

Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a,b) \\ u(a) = u_a \quad \text{ed} & u(b) = u_b \end{cases} \tag{1}$$

Scrivere un programma per la soluzione del problema (1) col metodo degli elementi finiti. In particolare, costruire la matrice di stiffness per il problema unidimensione usando elementi finiti lineari X_h^1 su una griglia a passo uniforme $h = \Delta x = (b-a)/n$.

Estendere il programma in varie direzioni:

1. costruire la matrice di stiffness corrispondente ad una partizione uniforme e con elementi finiti quadratici X_h^2 e risolvere il problema;

2. calcolare numericamente, su una soluzione esatta regolare, l'ordine di convergenza nel caso elementi finiti lineari e quadratici.

Equazione di diffusione–trasporto stazionaria

Si consideri il problema di diffusione–trasporto stazionario

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + bu' = 0 & x \in (a,b) \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases} \tag{2}$$

Scrivere un programma per la soluzione del problema (2) col metodo degli elementi finiti lineari su una griglia a passo uniforme $h = \Delta x = (b-a)/n$. Variare i valori dei due parametri ε e b, con $\varepsilon > 0$ e $b > 0$. In particolare, osservare il comportamento del metodo tenendo fisso $b = 1$ e facendo decrescere il valore di ε da 1 a 10^{-5} secondo le potenze di 10. Ripetere l'esperimento per valori di Δx decrescenti. Si calcoli la soluzione esatta del problema e quindi si calcoli l'errore dell'approssimazione in norma L^2.