Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi teorici: Problemi ellittici, approssimazione con schemi alle differenze finite ed elementi finiti

1. Si dimostri lo schema del Laplaciano a 9 punti:

$$\frac{1}{6}(v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) + \frac{2}{3}(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1})$$
$$-\frac{10}{3}v_{i,j} = \frac{\Delta x^2}{12}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8f_{i,j}).$$

   è accurato con ordine 4

2. Si verifichi che la funzione

$$u(x) = \begin{cases} -x & x \in [0, 0.4] \\ -0.4 & x \in (0.4, 0.6] \\ x - 1 & x \in (0.6, 1] \end{cases}$$

   è soluzione debole del problema di Poisson

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (0, 1)$$

   con $u(0) = u(1) = 0$ ed $f(x) = -\delta_{0.4}(x) - \delta_{0.6}(x)$.

3. Si dimostri che il problema debole:

$$\text{trovare } u : a(u, v) = F(v) \ \text{ per ogni } v \in V,$$

   con $a(\cdot, \cdot) \to \mathbb{R}$ forma bilineare, continua coerciva e simmetrica su V spazio di HIlbert, è equivalente al problema

$$\text{trovare } u : \min_{v \in V} J(v) = J(u) \text{ con } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

4. Si dimostri che la matrice di stiffness corrispondente alla discretizzazione di un problema ellittico con il metodo di Galerkin è simmetrica se e solo se la forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ che appare nella formulazione debole del problema è simmetrica.

5. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u')' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = f & \text{per } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

   con $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $\alpha(x), \gamma(x) \in L^\infty([0, 1])$ e $\beta(x) \in Lip([0, 1])$. Dimostrare che la forma bilineare associata alla formulazione debole è continua e coerciva in $V = H^1(0, 1)$ se $\gamma(x) \geq \beta'(x)/2 \quad q.o.$.

6. Si dimostri che la matrice di stiffness corrispondente alla discretizzazione di un problema ellittico con il metodo di Galerkin è simmetrica se e solo se la forma bi-lineare $a(\cdot,\cdot)$ che appare nella formulazione debole del problema è simmetrica.

7. Si dimostri, nel caso dimensione 1, che data $v_h \in X_h^1$ esiste $C > 0$ tale che

$$\|v_h'\|_{L_2(I)} \leq \frac{C}{h}\|v_h\|_{L_2(I)}.$$

8. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} u'' + \sigma u = f & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

   (a) verificare che la formulazione debole del problema è la seguente:

$$\text{trovare } u \in H_0^1(0,1) : \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 \sigma uv = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

   Di quali proprietà gode la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ che appare al primo membro?

   (b) Scrivere il corrispondente problema di Galerkin agli elementi finiti lineari.

   (c) Scrivere il problema di Galerkin agli elementi finiti lineari associato al problema con condizioni al bordo di tipo Neumann, $u'(0) = u_0,\ u'(1) = u_1$. Che condizioni deve verificare σ affinchè il problema lineare associato sia ben posto?

9. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + bu' = 0 & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & u(1) = 1 \end{cases}$$

   con ε, b constanti positive.

   (a) Calcolare la soluzione esatta del problema

   (b) Scrivere il corrispondente problema di Galerkin agli elementi finiti lineari.

   (c) Dimostrare che il metodo è convergente e dimostrare una stima per l'errore di convergenza.

10. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} u'' = f & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

   Scrivere il corrispondente problema di Galerkin agli elementi finiti quadratici, quindi caratterizzare la soluzione nello spazio $X_h^2(0,1)$.