Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali A.A. 2013-14
Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 2: Problemi ellittici in dimensione due

1. Approssimare, tramite una discretizzazione alle differenze finite basata su Laplaciano discreto a 5 punti e 9 punti, la seguente equazione di Poisson nel dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$
$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
dove $f(x,y) = 32\pi^2 \cos(4\pi x)\sin(4\pi y)$ e $\varphi = \sin(4\pi y)$.
   (a) si approssimi il sistema lineare ottenuto tramite l'algoritmo Gauss-Seidel
   (b) si verifichi l'ordine di convergenza dei metodi nella norma L^∞ , considerando che la soluzione analitica del problema è $u(x,y) = \cos(4\pi x)\sin(4\pi y)$.

2. Approssimare, tramite una discretizzazione alle differenze finite basata su Laplaciano discreto a 5 punti ed Up-wind, la seguente equazione di tipo diffusione trasporto nel dominio $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$
$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + aDu = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = \varphi & (x,y) \in \partial\Omega \setminus \Gamma_N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x) & (x,y) \in \Gamma_N \end{cases}$$
si approssimi la soluzione del problema con $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01$ e $a(x,y) = (2y(1-x^2), -2x(1-y^2))$.
Si considerino condizioni al bordo
   (a) Dirichlet con
$$\varphi = \begin{cases} 1 & x = -1 \quad -1 \le y \le 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
   e $\Gamma_N = \emptyset$
   (b) miste con
$$\varphi = \begin{cases} 1 & x = -1 \quad -1 \le y \le 1, \\ 0 & y = \{-1,1\} \quad -1 \le x \le 1, \end{cases}$$
   $\Gamma_N = \{(x,y) : x = 1, -1 \le y \le 1\}$ e con $\psi(y) = 0$ e $\psi(y) = \sin(\pi y)$.